Отзыв
научного руководителя
на диссертацию О.И. Рубанова
“Экстремальные свойства дистанционных графов”, представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация О.И. Рубанова посвящена классической проблеме на стыке комбинаторной геометрии и теории графов.

Если говорить о комбинаторно-геометрическом аспекте, то речь идет о проблеме Нелсона–Хадвигера, которая состоит в отыскании так называемого хроматического числа пространства, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной минимальному числу цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Хорошо известно, что величина $\chi(\mathbb{R}^n)$ растет экспоненциально с ростом размерности.

Упомянутую проблему с теорией графов связывает понятие дистанционного графа, т.е. графа, вершины которого — некоторые точки пространства, а ребра — некоторые пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. Понятно, что хроматическое число пространства равно хроматическому числу бесконечного дистанционного графа $(\mathbb{R}^n, E)$.

В теории графов есть классический и в своем роде неожиданный результат Эрдеша 1959 года о том, что для любых k, l существует граф с хроматическим числом, большим k, и обхватом (длиной кратчайшего цикла), большим l. Аналогичная постановка имеет смысл и для дистанционных графов. Более того, она также восходит к Эрдешу и также является классической. А именно, известно, что $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ и что конструкция, доказывающая нижнюю оценку, содержит 4 треугольника. Последнее весьма естественно, т.к. интуитивно кажется, что добиться хроматического числа 4 от графа тем легче, чем больше треугольников он будет содержать (тетраэдров на плоскости, конечно, не бывает). В 1976 году Эрдеш спросил, существует ли дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4 и без треугольников. Удивительно, но на вопрос был получен положительный ответ, и сейчас известны конструкции всего на 23 вершинах.

Задача Эрдеша естественно обобщается на случай трехмерного пространства, пространств больших размерностей и пространств растущей размерности. В последнем случае для каждого k ищется наибольшее значение $c > 1$, при котором существует бесконечно малая при $n \to \infty$ функция δ и последовательность дистанционных графов G_n в $\mathbb{R}^n$ с условием $\chi(G_n) \geq (c+\delta)^n$ и $\omega(G_n) < k$, где χ — хроматическое число графа, а ω — размер наибольшей клики в нем.

О.И. Рубанову удалось достичь ярких результатов как в случае трехмерного пространства, так и в случае пространств растущей размерности. Соответственно, в **главе 2** диссертации разрабатывается геометрическая техника построения дистанционных графов в пространстве размерности 3 с хроматическим числом 5 и без больших клик. Сперва в *параграфе 2.1* строится граф без тетраэдров. Затем в *параграфе 2.2* строится значительно более сложный граф без треугольников.

Глава 3 диссертации посвящена асимптотическому случаю. В ней разработано нетривиальное сочетание линейно-алгебраического и вероятностного методов, позволившее автору первым в свое время доказать экспоненциальность роста хроматических чисел дистанционных графов, которые не содержат клик данного размера. Также разработанные методы применены к дистанционным графам, у которых ребра задаются не одним, а несколькими расстояниями.

В целом диссертация Рубанова — это серьезная работа в области экстремальной теории графов, результаты которой опубликованы в центральных математических журналах (Математический сборник, Математические заметки, Electronic Notes in Discrete Matheatics) и докладывались на нескольких крупных международных конференциях. Они вызвали значительный резонанс среди специалистов в области и уже используются при чтении некоторых курсов в МГУ им. М.В. Ломоносова и в МФТИ. Они также представляют большой интерес для многих других крупных научных и учебных центров: ИППИ РАН, МИРАН им. В.А. Стеклова, ВЦ РАН, ИПМ ДВО РАН, РУДН, ННГУ им. Лобачевского и т.д.

Таким образом, диссертационная работа О.И. Рубанова полностью соответствует требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а Олег Игоревич Рубанов заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор

А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

И.о. декана механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук, профессор

В.Н. Чубариков