МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Жданов Игорь Игоревич

Свойства самонормированных сумм случайных величин

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор В.М.Круглов

Москва – 2014

Содержание

Введение

Актуальность темы. Данная работа посвящена исследованию асимптотических свойств саморированных сумм независимых случайных величин. Самонормированные суммы естественным образом появляются при решении ряда задач математической статистики и теории вероятностей. В качестве примера можно указать на классическую статистику Стьюдента, в определение которой входит самонормированная сумма, построенная по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Систематическое исследование свойств самонормированных сумм началось с выходом статьи $Efron$ ([1]), посвященной исследованию асимптотических свойств статистики Стьюдента при некоторых нестандартных условиях. С другими примерами и задачами, в которых возникают самонормированные суммы, можно ознакомиться по обзорной статье *Shao* ([2]).

Одним из дополнительных мотивов исследований асимптотических свойств самонормированных сумм является стремление найти решение проблемы нормирования и центрирования в классических предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. Проблема нормирования и центрирования возникла в тридцатые годы прошлого столетия и до сих пор не получила своего окончательного решения. Нормирование суммы случайных величин квадратным корнем из суммы квадратов слагаемых, как это делается для самонормированных сумм, частично продвигает решение упомянутой проблемы центрирования и нормирования. Последние три десятилетия ведутся интенсивные исследования самонормированных сумм независимых случайных величин. Для самонормированных сумм были доказаны несколько вариантов центральной предельной теоремы ($Chistyakov, Götze$ ([3]), *Егоров В.А.* ([4]), $Mason, Zinn$ ([5])) , многочисленные варианты закона повторного логарифма ([6], [7], [8], [9]), найдены необходимые и достаточные условия слабой компактности ([10]). Кроме того были доказаны аналоги неравенства Берри-Эссеена ([11], [12]), а также неравенства для больших уклонений ([13], [14]). Отметим также статью ([15]) о характеризации нормального закона с помощью самонормированных сумм. Во всех перечисленных исследованиях, за исключением упомянутого исследования Егорова В.А., речь идет о самонормированных суммах, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Аналогичные исследования свойств самонормированных сумм, построенных по независимым различно распределенным случайным величинам, практически отсутствуют. Причина состоит в том, что нет адекватного математического аппарата.

Цель работы. В диссертации исследованы асимптотические свойства самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, каждая из которых принадлежит одному из конечного числа типов, что заметно расширяет класс случайных величин, самонормированные суммы которых допускают естественное обобщение результатов, доказанных для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам.

Научная новизна. Все основные результаты, доказанные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем.

1. Доказаны необходимые и достаточные условия слабой компактности самонормированных сумм случайных величин, принадлежащих одному типу вероятностного распределения.

2. Доказаны необходимые и достаточные условия слабой компактности самонормированных сумм случайных величин, принадлежащих конечному числу типов вероятностных распределений.

3. Доказан аналог центральной предельной теоремы для самонормированных сумм случайных величин, принадлежащих одному типу вероятностного распределения.

4. Доказан усиленный вариант закона повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Доказаны два обобщения известных

законов повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по случайным величинам, принадлежащих конечному числу типов.

Методы исследования. Были привлечены методы классического математического анализа, методы функционального анализа и теории меры. Наиболее широко использовались методы теории вероятностей,случайных процессов и, в частности, теории мартингалов.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации могут быть применены к решению как практических так и теоретических задач. Доказанные теоремы являются хорошим подспорьем для дальнейших исследований свойств самонормированных сумм, обобщения уже известных свойств на более широкий класс случайных величин. В своем классическом виде теоремы, аналоги которых доказаны в диссертации, нашли широкое применение в частности, в финансовой математике, поэтому можно ожидать, что доказанные аналоги тоже могут быть применены для некоторых практических задач.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка используемой литературы, насчитывающего 28 наименований.

Апробация работы и публикации. По теме диссертации опубликовано 2 статьи ([16], [17]) в журналах, рекомендуемых ВАК. Статьи единолично принадлежат автору диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на семинаре "Теория риска и смежные вопросы"(руководители: профессор В.Е. Бенинг, профессор В.Ю. Королев).

Краткое содержание диссертации.

Введение. В этой части диссертации приведены краткие исторические сведения о теме исследования и перечислены наиболее значимые публикации об асимтотических свойствах самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам.

Первые три параграфа диссертации содержат ряд подготовительных утверждений и три теоремы о слабой компактности последовательностей самонормированных сумм. Все они относятся к основным результатам диссертации. Одна теорема содержит необходимые и достаточные условия для слабой компактности последовательности самонормированных сумм, построенных по независимым однотипным случайным величинам. Вторая является обобщением первой теоремы. Она содержит необходимые и достаточные условия слабой компактности последовательности самонормированных сумм, построенных по случайным величинам, каждая из которых имеет распределение, принадлежащее одному из конечного числа числа типов распределений. Третья теорема утверждает о том, что слабая компактность последовательности статистик Стьюдента равносильно слабой компактности последовательности самонормированных сумм, которые входят в определение статистик Стьюдента. Точные формулировки приведены в третьем параграфе диссертации.

В **четвертом параграфе** доказана центральная предельная теорема для самонормированных сумм, построенных для независимых однотипных случайных величин. Теорема утверждает, что если случайные величины принадлежат области притяжения нормального типа, то распределения самонормированных сумм слабо сходятся к стандартному нормальному закону. Если случайные величины симметричны, то слабая сходимость распределений самонормированных сумм к стандартному нормальному закону достаточна для того, чтобы тип принадлежал области притяжения нормального типа. В части достаточности теорема является обобщением цетральной предельной теоремы, доказанной $Giné, Götze, Mason$ ([18]) для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Точная формулировка приведена в четвертом параграфе.

В **пятом параграфе** доказаны три варианта закона повторного логарифма для последовательностей самонормированных сумм. Два варианта закона повторного логарифма доказаны для последовательностей самонормированных сумм, построенных многотипным независимым случайным величинам. Одна из этих двух теорем является уточнением другой теоремы на случай симметричных случайных величин. Третья теорема представляет собой равномерный закон повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам. Этот закон повторного логарифма является новым по своей форме и не имеет аналогов даже среди классических законов повторного логарифма. Точные формулировки всех теорем приведены в пятом параграфе.

Благодарности. Автор выражает сердечную благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору В.М. Круглову за постановку задачи, важные замечания, помощь в нахождении решения.

§ 1

Слабая компактность самонормированных сумм независимых однотипных случайных величин

1.1 Постановка задачи

Пусть независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть даны положительные числа $c_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $0 < c = \inf_{n\geq 1} c_n < \sup_{n\geq 1} c_n = d < \infty$. Обозначим $X_n = c_n Y_n$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n, V_n^2 = X_1^2 + \cdots + V_n^2, \bar{X} = S_n/n$. Мы будем иметь дело с самонормированными суммами S_n/V_n. Отношение S_n/V_n полагается равным нулю, если $V_n^2 = 0$ п.в. (почти всюду по отношению к вероятности $\mathbb{P}$.) Определим статистику Стьюдента

$$t_n = \frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}$$

и преобразуем ее следующим образом

$$t_n = \frac{S_n}{V_n}\sqrt{\frac{1-1/n}{1-S_n^2/(nV_n^2)}}. \tag{1.1}$$

Задача отыскания условий, при которых самонормированные суммы и статистика Стьюдента слабо сходятся, относится к числу центральных тем, связанных с самонормированными суммами. В многочисленных исследованиях (см., например, [18], [3], [16], [6]) было установлено, что важную, если не ключевую роль, играют условия слабой компактности самонормированных сумм.

Определение 1.1. *Последовательность* $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ *случайных величин называется слабо компактной, если из любой подпоследовательности* $\{\xi_{k_n}\}_{n\geq 1}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{\xi_{k_{m_n}}\}_{n\geq 1}$ *такую, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\xi_{k_{m_n}} < x\} = \mathbb{P}\{\xi < x\}$ *для всех* $x = \mathbb{R} = (-\infty;\infty)$ *и для некоторой случайной величины* ξ.

Известно (см. [19], стр. 43), что слабая компактность последовательности $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ равносильна условию

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\{|\xi_n| > L\} = 0. \tag{1.2}$$

В статье [10] указаны необходимые и достаточные условия слабой компактности самонормированных сумм, построенных по одинаково распределенным независимым случайным величинам. В общем случае вопрос о слабой компактности самонормированных сумм остается открытым и, по всей видимости, является весьма трудным. В первом параграфе настоящей работы результаты из упомянутой статьи [10] обобщены на самонормированные суммы, построенные по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному невырожденному типу.

1.2 Вспомогательные леммы

В этом разделе собраны ключевые вспомогательные утверждения, на которых будет построено доказательство основных утверждений.

Лемма 1.1. *Для того, чтобы последовательность* $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ *была слабо компактной необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{t_n\}_{n\geq 1}$ *была слабо компактной.*

Доказательство. Лемма является частным случаем теоремы 3.1, которая доказана во втором параграфе.

Определим функции $G(r)$, $K(r)$, $M(r)$, $Q(r)$, $r > 0$, положив

$$G(r) = \mathbb{P}(|Y_1| > r), K(r) = \frac{\mathbb{E}(Y_1^2; |Y_1| < r)}{r^2},$$
$$M(r) = \frac{\mathbb{E}(Y_1; |Y_1| < r)}{r}, Q(r) = G(r) + K(r).$$

Доопределим эти функции в точке $r = 0$, положив

$$G(0) = \mathbb{P}(|Y_1| > 0), K(0) = 0, M(0) = 0.$$

Запишем $Q(r), r > 0$, в следующем виде

$$Q(r) = \mathbb{P}(|Y_1| > r) + \frac{\mathbb{E}(Y_1^2; |Y_1| \leq r)}{r^2} = \frac{\mathbb{E}(\min(Y_1^2; r^2))}{r^2}.$$

С помощью интегрирования по частям мы получим

$$\begin{aligned}
Q(r) &= \frac{1}{r^2}\int\limits_0^\infty \min(y^2, r^2) d(1 - G(y)) \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(\int\limits_0^r y^2 dG(y) + \int\limits_r^\infty r^2 dG(y)\right) \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(r^2G(r) - \int_0^r G(y)dy^2 - r^2G(r))\right) = \frac{1}{r^2}\int_0^r 2yG(y)dy.
\end{aligned}$$

Заметим, что функция $Q(r), r \in [0, r_0]$, постоянна и равна $Q(0) = \mathbb{P}(|Y_1| > 0) > 0$, где $r_0 = \inf(r > 0 : G(r) < G(0))$. Для $r > r_0$ мы имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(r)}{dr} &= -\frac{2}{r^3}\int_0^r 2G(y)ydy + \frac{1}{r^2}2rG(r) \\
&< -\frac{2}{r^3}G(r)\int_0^r 2ydy + \frac{1}{r}2G(r) = -\frac{2}{r}G(r) + \frac{2G(r)}{r} = 0.
\end{aligned}$$

Функция $Q(r), r > r_0$, непрерывна и строго убывает, так как ее производная $Q'(r), r > r_0$, строго отрицательна.

Для любого $\lambda > 0$ найдется $n(\lambda) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n(\lambda)$ выполняется неравенство $n > (\lambda Q(0))^{-1}$ и, следовательно, найдется число $a_n(\lambda) > r_0$ такое, что

$$Q(a_n(\lambda)) = \frac{1}{\lambda n}. \tag{1.3}$$

Заметим, что $a_n(\lambda) < a_{n'}(\lambda')$, если $n \le n', \lambda \le \lambda', n'\lambda' > n\lambda > 1/Q(0)$. Обозначим

$$U_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 \wedge a_n^2(\lambda)),$$
$$\overline{U}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 \wedge a_n^2(\lambda))$$

для $\lambda > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ таких, что $n\lambda > 1/Q(0)$. Мы воспользовались обозначением $\min(a, b) = a \wedge b$ для любых вещественных чисел a и b.

Лемма 1.2. *Фиксируем $\lambda > 0$. Для любых $\delta \in (0; \lambda^{-1/2})$ и $n > (\lambda Q(0))^{-1}$ выполняется следующее неравенство*

$$\mathbb{P}\{(U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \ge \frac{(1 - \lambda\delta^2)^2}{\lambda + 1}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Величина $U_n(\lambda)$ допускает следующую оценку снизу

$$U_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 \wedge a_n^2(\lambda)) \ge (c^2 \wedge 1) \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 \wedge a_n^2(\lambda)) = (c^2 \wedge 1)\overline{U}_n(\lambda). \tag{1.5}$$

С учетом (1.3) мы получим, что

$$\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda) = n\mathbb{E}(Y_1^2 \wedge a_n^2(\lambda)) = na_n^2(\lambda)Q(a_n(\lambda)) = \frac{a_n^2(\lambda)}{\lambda}. \tag{1.6}$$

Привлекая оценки $(Y_1^4 \wedge a_n^4(\lambda)) \le a_n^2(\lambda)(Y_1^2 \wedge a_n^2(\lambda))$ и $2C_n^2 = n(n-1) < n^2$, мы получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{U}_n^2(\lambda) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}(Y_i^2 \wedge a_n^2(\lambda)))^2 = \\
&= n\mathbb{E}(Y_1^4 \wedge a_n^4(\lambda)) + 2C_n^2(\mathbb{E}(Y_1^2 \wedge a_n^2(\lambda)))^2 \\
&\le na_n^2(\lambda)\mathbb{E}(Y_1^2 \wedge a_n^2(\lambda)) + n^2(\mathbb{E}(Y_1^2 \wedge a_n^2(\lambda)))^2 \\
&= na_n^4(\lambda)Q(a_n(\lambda)) + (na_n^2(\lambda)Q(a_n(\lambda)))^2 \\
&= a_n^4(nQ(a_n(\lambda))) + a_n^4(nQ(a_n(\lambda)))^2 \\
&= a_n^4(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для доказательства (1.4) мы воспользуемся известным (см. [20], стр. 16) неравенством Кантелли

$$\mathbb{P}\{Y \ge x\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + x^2}, x > 0,$$

справедливым для любой случайной величины Y с математическим ожиданием $\mathbb{E}Y = 0$ и дисперсией $\mathbb{E}Y^2 = \sigma^2$. Привлекая (1.5) и (1.6), мы получим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} &\ge \mathbb{P}\{\overline{U}_n(\lambda) > \lambda\delta^2\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)\} \\
&= \mathbb{P}\{\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda) - \overline{U}_n(\lambda) < (1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda) - \overline{U}_n(\lambda) \ge (1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)\} \\
&\ge 1 - \frac{\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}{\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2 + ((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)))^2} \\
&= \frac{((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)))^2}{\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2 + ((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)))^2}.
\end{aligned}$$

Так как $\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2 + ((\lambda\delta^2 - 1)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)))^2 \le \mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda))^2$, то

$$\mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \ge (1-\lambda\delta^2)^2\frac{(\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}{\mathbb{E}\overline{U}_n^2(\lambda)}.$$

Это неравенство вместе с (1.6) и (1.7) влекут (1.4). Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Для фиксированных* $\lambda > 0$, $L > 0$ *и* $n > (\lambda Q(0))^{-1}$ *выполня-*

ется следующее неравенство

$$\mathbb{P}\{V_n > dLa_n(\lambda)\} \le \frac{1}{\lambda L^2} + 1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda n}\right)^n. \tag{1.8}$$

Доказательство. Обозначим $Y_n^* = \max\limits_{1\le i\le n} |Y_i|$ и $\overline{V}_n^2 = \sum_{k=1}^n Y_k^2$. Заметим, что $V_n^2 \le d^2\overline{V}_n^2$ и на множестве $\{Y^* \le a_n(\lambda)\}$ выполняется равенство $\overline{V}_n^2 = \overline{U}_n$. С учетом этих наблюдений мы получим, что

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{V_n > dLa_n(\lambda)\} \le \mathbb{P}\{\overline{V}_n > La_n(\lambda)\} \\ &= \mathbb{P}\{\overline{V}_n^2 > L^2a_n^2(\lambda), Y_n^* \le a_n^2(\lambda)\} + \mathbb{P}\{\overline{V}_n^2 > L^2a_n^2(\lambda), Y_n^* > a_n^2(\lambda)\} \\ &\le \mathbb{P}\{\overline{U}_n > L^2a_n^2(\lambda), Y_n^* \le a_n^2(\lambda)\} + \mathbb{P}\{Y_n^* > a_n^2(\lambda)\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

По неравенству Маркова мы получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\overline{U}_n > L^2a_n^2(\lambda), Y^* \le a_n^2(\lambda)\} &\le \mathbb{P}\{\overline{U}_n > L^2a_n^2(\lambda)\} \\ &\le \frac{\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)}{L^2a_n^2(\lambda)} = \frac{1}{\lambda L^2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Последнее равенство выполняется в силу (1.6). Так как случайные величины $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы и одинаково распределены, то

$$\mathbb{P}\{Y_n^* > a_n(\lambda)\} = 1 - \mathbb{P}\{Y^* \le a_n(\lambda)\} = 1 - (\mathbb{P}\{|Y_1| \le a_n(\lambda)\})^n = 1 - (1 - G(a_n(\lambda))^n.$$

Напомним, что $Q(r) = G(r) + M(r) \ge G(r)$ и $Q(a_n(\lambda)) = 1/(\lambda n)$. Поэтому

$$\mathbb{P}\{Y_n^* > a_n(\lambda)\} \le 1 - (1 - G(a_n(\lambda)))^n \le 1 - (1 - Q(a_n(\lambda)))^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n\lambda}\right)^n.$$

Отсюда и из (1.9) и (1.10) следует (1.8). Лемма доказана.

Обозначим

$$T_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{\{|Y_i| \le a_n(\lambda)\}},$$
$$R_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{\{|Y_i| > a_n(\lambda)\}},$$
$$J_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{|Y_i| > a_n(\lambda)\}}.$$

Лемма 1.4. *Для фиксированных $\lambda > 0$, $L > 0$ и $n > (\lambda Q(0))^{-1}$ выполняется следующее неравенство*

$$\mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \le \frac{1}{\lambda L^2}. \tag{1.11}$$

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского мы получим

$$|R_n(\lambda)|^2 = |\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{\{|Y_i| > a_n(\lambda)\}}|^2$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{|Y_i| > a_n(\lambda)\}} = V_n^2 J_n(\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \le \mathbb{P}\{|V_n \sqrt{J_n(\lambda)}| > LV_n\} = \mathbb{P}\{J_n(\lambda) > L^2\}.$$

По неравенству Маркова мы получим

$$\mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \le \mathbb{P}\{J_n(\lambda) > L^2\} \le \frac{\mathbb{E}J_n(\lambda)}{L^2}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{|Y_i| > a_n(\lambda)\}}}{L^2} = \frac{n\mathbb{P}(|Y_1| > a_n(\lambda))}{L^2}$$
$$= \frac{nG(a_n(\lambda))}{L^2} \le \frac{nQ(a_n(\lambda))}{L^2} = \frac{1}{\lambda L^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Для фиксированных $\lambda > 0$, $L > 0$, $\delta \in (0, \lambda^{-1/2})$ и $n >$*

$(\lambda Q(0))^{-1}$ *выполняется следующее неравенство*

$$\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2LV_n\} \le \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{L^2\delta^2} + \frac{1}{L}\right) + 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{1+\lambda}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Так как $S_n = T_n(\lambda) + R_n(\lambda)$, то

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2LV_n\} \\ &\le \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > LV_n\} + \mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Первое слагаемое справа в (1.13) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > LV_n)\} = \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > LV_n, V_n^2 > \delta^2 d^2 a_n^2(\lambda)\} \\ &+ \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > LV_n, V_n^2 \le \delta^2 d^2 a_n^2(\lambda)\} \\ &\le \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > L\delta d a_n(\lambda)\} + \mathbb{P}\{V_n^2 \le \delta^2 d^2 a_n^2(\lambda)\}. \end{aligned}$$

По неравенству Чебышева мы получим, что

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > L\delta d a_n(\lambda)\} \le \frac{\mathbb{E}|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)|^2}{L^2\delta^2 d^2 a_n^2(\lambda)} \\ &= \frac{\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i^2 \mathbb{1}_{\{|Y_i| \le a_n(\lambda)\}}) - \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}(X_i \mathbb{1}_{\{|Y_i| \le a_n(\lambda)\}}))^2}{L^2 d^2 \delta^2 a_n^2(\lambda)} \\ &\le \frac{\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i^2 \mathbb{1}_{\{|Y_i| \le a_n(\lambda)\}})}{L^2 d^2\delta^2 a_n^2(\lambda)} = \frac{d^2 n K(a_n(\lambda)) a_n^2(\lambda)}{L^2 d^2 \delta^2 a_n^2(\lambda)} \\ &= \frac{nK(a_n(\lambda))}{L^2\delta^2} \le \frac{nQ(a_n(\lambda))}{L^2\delta^2} = \frac{1}{\lambda L^2 \delta^2}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Принимая во внимание неравенство $U_n(\lambda) \le V_n^2$, мы получим по лемме 1.2, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{V_n^2 \le \delta^2 d^2 a_n^2(\lambda)\} &= 1 - \mathbb{P}\{V_n^2 > \delta^2 d^2 a_n^2(\lambda)\} \\ &\le 1 - \mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1) a_n^2(\lambda)\} \le 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{\lambda+1}. \end{aligned}$$

Объединяя обе оценки, мы получим

$$\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > LV_n\} \le \frac{1}{\lambda L^2\delta^2} + 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{\lambda+1}.$$

Эта оценка вместе с леммой 1.4 и неравенством (1.13) ведут к оценке (1.12). Лемма доказана.

1.3 Доказательства утверждений

В этом разделе доказаны три теоремы, составляющие главные результаты параграфа.

Теорема 1.1. *Пусть дана последовательность* $\{z_n\}_{n\geq 1}$ *вещественных чисел. Следующие утверждения эквиваленты*

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\{|S_n - z_n| > LV_n\} = 0, \tag{1.15}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{z_n - na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))}{a_n(\lambda)}\right| < \infty \text{ для всех } \lambda > 0, \tag{1.16}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{z_n - na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))}{a_n(\lambda)}\right| < \infty \text{ для всех } \lambda \in (0,1). \tag{1.17}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (1.15) выполняется. Напомним, что $S_n = T_n(\lambda) + R_n(\lambda)$ и, следовательно, $|T_n(\lambda) - z_n| \leq |S_n - z_n| + |R_n(\lambda)|$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $L > 1$ и для любого $n > (\lambda Q(0))^{-1}$ мы получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - z_n| > 2dL^2a_n(\lambda)\} &= \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - z_n| > 2dL^2a_n(\lambda), V_n \leq dLa_n(\lambda)\}\\
&+ \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - z_n| > 2dL^2a_n(\lambda), V_n > dLa_n(\lambda)\}\\
&\leq \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - z_n| > 2LV_n\} + \mathbb{P}\{V_n > dLa_n(\lambda)\}\\
&\leq \mathbb{P}\{|S_n(\lambda) - z_n| > LV_n\} + \mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\}\\
&+ \mathbb{P}\{V_n > dLa_n(\lambda)\}.
\end{aligned}$$

Привлекая леммы 1.3 и 1.4, мы получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - z_n| > 2dL^2a_n(\lambda)\} &\leq \mathbb{P}\{|S_n(\lambda) - z_n| > LV_n\}\\
&+ \frac{2}{\lambda L^2} + 1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda n}\right)^n.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Отсюда и используя оценку (1.14) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|\mathbb{E}T_n(\lambda) - z_n| > 4dL^2 a_n(\lambda)\} \\
&\qquad \le \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - z_n| > 2dL^2 a_n(\lambda)\} + \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2dL^2 a_n(\lambda)\} \\
&\qquad \le \mathbb{P}\{|S_n(\lambda) - z_n| > LV_n\} + \frac{2}{\lambda L^2} + 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{4L^4\lambda}.
\end{aligned}
$$

В силу (1.15) найдется $L_0 > 0$ такое, что $\sup_{n\ge1}\mathbb{P}\{|S_n(\lambda) - z_n| > LV_n\} < \exp\{-1/\lambda\}/8$ для всех $L \ge L_0$. Число L_0 можно выбрать настолько большим, чтобы $2/L^2 + 1/(4L^4) < \lambda\exp\{-1/\lambda\}/8$ для всех $L \ge L_0$. Так как $\lim_{n\to\infty}(1 - \lambda/n)^n = \exp\{-1/\lambda\}$, то найдется n_0 такое, что $(1-\lambda/n)^n > \exp\{-1/\lambda\}/2$ для всех $n \ge n_0$. Для $L \ge L_0$ и $n \ge n_0$ выполняются неравенства $\mathbb{P}(\{|\mathbb{E}T_n(\lambda) - z_n| > 4dL^2 a_n(\lambda)\} \le 1 - \exp\{-1/\lambda\}/4 < 1$. Так как вероятность $\mathbb{P}\{|\mathbb{E}T_n(\lambda) - z_n| > 4dL^2 a_n(\lambda)\}$ может равняться только нулю или единице, то она равна нулю. Это означает, что $|\mathbb{E}T_n(\lambda) - z_n| \le 4dL^2 a_n(\lambda))$ для всех $n > 1/(\lambda Q(0))$. Отсюда следует (1.16). Напомним, что $\mathbb{E}T_n(\lambda) = na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))$. Очевидно, что (1.16) влечет (1.17). Предположим теперь, что выполняется утверждение (1.17). Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda \in (0,1)$ такое, что $2(1-(1-\lambda)^2/(\lambda+1)) < \varepsilon$. Фиксируем такое λ и обозначим

$$
c(\lambda) = \sup_{n > (\lambda/Q(0))} |\frac{z_n - na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))}{a_n(\lambda)}|.
$$

Так как $|S_n - z_n| \le |S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| + |\mathbb{E}T_n(\lambda) - z_n| \le |S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| + c(\lambda)a_n(\lambda)$, то для любого $L > 0$ справедливы следующие соотношения

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|S_n - z_n| > 3LV_n\} \le \mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 3LV_n - c(\lambda)a_n(\lambda)\} \\
&= \mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 3LV_n - c(\lambda)a_n(\lambda), LV_n > c(\lambda)a_n(\lambda)\} \\
&+ \mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 3LV_n - c(\lambda)a_n(\lambda), LV_n \le c(\lambda)a_n(\lambda)\} \\
&\le \mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2LV_n\} + \mathbb{P}\{LV_n \le c(\lambda)a_n(\lambda)\}.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Найдется $L_0 > 1$ такое, что $c(\lambda)/((c\wedge 1)L_0) < \sqrt{\lambda}$. Напомним, что $U_n(\lambda) \le V_n^2$.

По лемме 1.2 с $\delta = c(\lambda)/((c \wedge 1)L_0)$ для $L \geq L_0$ и $n > 1/(\lambda Q(0))$ мы получим

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{LV_n \leq c(\lambda)a_n(\lambda)\} \leq \mathbb{P}\{L_0V_n \leq c(\lambda)a_n(\lambda)\} = 1 - \mathbb{P}\{V_n^2 > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\}\\ \leq 1 - \mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \leq 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{\lambda+1}.\end{aligned}$$

По лемме 1.5 с $\delta = c(\lambda)/((c \wedge 1)L_0)$ для $n > 1/(\lambda Q(0))$ и $L \geq L_0$ справедлива оценка

$$\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2LV_n\} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{L^2\delta^2} + \frac{1}{L}\right) + 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{\lambda+1}. \tag{1.20}$$

После подстановки приведенных оценок в (1.18) мы получим

$$\mathbb{P}\{|S_n - z_n| > 3LV_n\} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{L^2\delta^2} + \frac{1}{L}\right) + 2\left(1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{\lambda+1}\right), n > 1/(\lambda Q(0)),$$

следовательно,

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\{|S_n - z_n| > 3LV_n\} \leq 2\left(1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{\lambda+1}\right) \leq 2\left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda+1}\right) < \varepsilon.$$

Отсюда следует (1.15), так как число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Следующие утверждения эквиваленты*

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\{|S_n| > LV_n\} = 0, \tag{1.21}$$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{|M(r)|}{Q(r)} < \infty. \tag{1.22}$$

*Доказательство.*Предположим, что выполняется утверждение (1.22). Принимая во внимание (1.3), мы получим

$$\begin{aligned}\left|\frac{na_n(\lambda)M(a_n(\lambda)) - 0}{a_n(\lambda)}\right| = \left|\frac{na_n(\lambda)M(a_n(\lambda))}{a_n(\lambda)}\right| = \left|nM(a_n(\lambda))\right|\\ = \frac{|M(a_n(\lambda))|}{\lambda Q(a_n(\lambda))}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Отсюда и из (1.22) следует, что выполнено условие (1.17) из теоремы 1.1, по которой выполняется утверждение (1.21).

Предположим теперь, что выполняется утверждение (1.21), но утверждение (1.22) не выполняется. В этом случае найдется неограниченно возрастающая последовательность $\{r_k\}_{k\geq 1}$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|M(r_k)|}{Q(r_k)} = \infty. \tag{1.24}$$

Обозначим $n_k = \max\{n : nQ(r_k) \leq 1\}$. Заметим, что $n_k Q(r_k) \leq 1 < (n_k + 1)Q(r_k)$. Обозначим $\lambda_k = 1/(n_k Q(r_k))$. Из неравенства $1/(n_k\lambda_k) = Q(r_k) > 1/(n_k+1)$ следует, что $1 \leq \lambda_k < 1+1/n_k$. Так как $n_k = 1/(\lambda_k Q(r_k)) > 1/(\lambda_k Q(0))$, то $r_k = a(\lambda_k)$ в соответствии с определением (1.3). Ниже определения (1.3) пояснено, что $a_n(\lambda) \leq a_n(\lambda')$, если $\lambda \leq \lambda'$, и, следовательно, $a_{n_k}(1) \leq a_{n_k}(\lambda_k)$. По определению функции $M(r), r > 0$, мы получим

$$\begin{aligned} |n_k a_{n_k}(\lambda_k)M(a_{n_k}(\lambda_k)) &- n_k a_{n_k}(1)M(a_{n_k}(1))| \\ &= n_k \mathbb{E}(|Y_1|\mathbb{1}_{\{a_{n_k}(1)<|Y_1|\leq a_{n_k}(\lambda_k)\}}) \\ &\leq a_{n_k}(\lambda_k)n_k\mathbb{P}\{|Y_1| > a_{n_k}(1)\} \\ &\leq a_{n_k}(\lambda_k)n_k Q(a_{n_k}(1)) = a_{n_k}(\lambda_k). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Положив $\lambda = \lambda_k$ и $n = n_k$ в (1.23) и приняв во внимание, что $1 \leq \lambda_k < 1+1/n_k$ и $a_{n_k}(\lambda_k) = r_k$, мы получим

$$n_k|M(a_{n_k}(\lambda_k))| = \frac{1}{\lambda_k}\frac{|M(r_k)|}{Q(a_{n_k}(\lambda_k))} \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда и из (1.25) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k a_{n_k}(1)M(a_{n_k}(1))}{a_{n_k}(\lambda_k)} = 0$$

Выше упоминалось, что $a_{n_k}(1) \leq a_{n_k}(1) \leq a_{n_k}(\lambda_k)$. Мы видим, что $n_k|M(a_{n_k}(1))| \to \infty$ при $k \to \infty$ и, следовательно, утверждение (1.16) с $\lambda = 1$ не выполняется; верхний предел, вычисленный по подпоследовательности $n = n_k, z_{n_k} = 0, k = 1, 2, \ldots,$ равен бесконечности. По теореме 1.1 утверждение (1.21) не имеет места. Если бы утверждение (1.21) выполнялось, то предположение (1.24) не могло бы иметь место. Это противоречие доказывает, что (1.21) влечет (1.22). Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Следующие условия эквиваленты*

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\ge 1}\mathbb{P}\{|S_n|>LV_n\}=0,$$
$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\ge 1}\mathbb{P}\{|t_n|>L\}=0,$$
$$\limsup_{r\to\infty}\frac{|M(r)|}{Q(r)}<\infty.$$

*Доказательство.*Все утверждения следуют из теоремы 1.2 и леммы 1.1. Теорема доказана.

§ 2

Дополнительные сведения о слабой компактности самонормированных сумм однотипных случайных величин

Из результатов параграфа 1 следует, что последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sum_{k=1}^n Y_k/\sqrt{\sum_{k=1}^n Y_k^2}\}_{n\geq 1}$ слабо компактна. Это наблюдение позволяет вывести ряд новых свойств последовательности $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$, которые вытекают из её слабой компактности. Сначала мы докажем несколько вспомогательных утверждений. Обозначим

$$\xi_n = Y_1 + \cdots + Y_n,$$
$$W_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2.$$

Лемма 2.1. *Пусть $r, k, n, m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ натуральные числа такие, что $1 \leq r \leq k \leq n,\ m_1 \geq 1, \ldots, m_r \geq 1,\ m_1 + \cdots + m_r = k$. Обозначим $n_r = [n/r]$, s - число чисел среди $m_1, \ldots, m_r$, которые равны единице. Квадратные скобки* *в данном случае обозначают целую часть от числа взятого в скобки. Тогда выполняются следующее неравенство*

$$n_r^r \left(\frac{k!}{m_1! \dots m_r!} \right)^{1/2} \mathbb{E} \frac{X_1^{m_1} \dots X_r^{m_r}}{W_n^k} \leq \max(1, d^r) \left(\mathbb{E} \frac{|\xi_{n_r}|}{W_{n_r}} \right)^s . \qquad (2.1)$$

Доказательство. Обозначим

$$\xi(i) = \sum_{j=1}^{n_r} Y_{(i-1)n_r+j}^{m_i},$$
$$W(i) = \left(\sum_{j=1}^{n_r} Y_{(i-1)n_r+j}^2 \right)^{1/2}, \ i = 1, \dots, r.$$

Заметим, что

$$n_r^r \left| \mathbb{E} \frac{X_1^{m_1} \dots X_r^{m_r}}{W_n^k} \right| = \left| c_1^{m_1} \dots c_r^{m_r} n_r^r \mathbb{E} \frac{Y_1^{m_1} \dots Y_r^{m_r}}{W_n^k} \right| =$$
$$c_1^{m_1} \dots c_r^{m_r} \left| \mathbb{E} \frac{\xi(1) \dots \xi(r)}{W_n^k} \right|,$$

$$W_n^k = \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j^2 \right)^{k/2} = \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_r} Y_{(i-1)n_r+j}^2 \right)^{k/2}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{r} W(i)^2 \right)^{k/2} = \left[\left(\sum_{i=1}^{r} W^2(i) \right)^k \right]^{1/2} \geq \left(\frac{k!}{m_1! \dots m_r!} \right)^{1/2} \prod_{i=1}^{r} W(i)^{m_i}.$$

Так как $c_1 \leq d, \dots, c_r \leq d$, случайные величины $Y_1, \dots, Y_n$ независимы и одинаково распределены, то

$$n_r^r \left| \mathbb{E} \frac{X_1^{m_1} \dots X_r^{m_r}}{W_n^k} \right| = c_1^{m_1} \dots c_r^{m_r} \frac{k!}{m_1 \dots m_r} \mathbb{E} \left| \frac{\xi(1) \dots \xi(r)}{W_n^k} \right|$$
$$\leq \max(1, d^r) \left(\frac{k!}{m_1 \dots m_r} \right)^{-1/2} \mathbb{E} \left| \frac{\xi(1) \dots \xi(r)}{W(1)^{m_1} \dots W(r)^{m_r}} \right|$$
$$= \max(1, d^r) \left(\frac{k!}{m_1 \dots m_r} \right)^{-1/2} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{E} \frac{|\xi(i)|}{W(i)^{m_i}}$$

$$\leq \max(1,d^r)\left(\frac{k!}{m_1\dots m_r}\right)^{-1/2}\prod_{i:m_i>1}\mathbb{E}\frac{|\xi(i)|}{W(i)^{m_i}}\prod_{i:m_i=1}\mathbb{E}\frac{|\xi(i)|}{W(i)^{m_i}}$$

$$= \max(1,d^r)\left(\frac{k!}{m_1\dots m_r}\right)^{-1/2}\left(\mathbb{E}\frac{|\xi_{n_r}|}{W_{n_r}}\right)^s.$$

Неравенство (2.1) и лемма доказаны.

Лемма 2.2. *Для любых $k,n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{W_n}\right)^k\right| \leq c(k)(\max(1,d))^k\max\left(1,\left(\max_{1\leq l\leq n}\mathbb{E}\left|\frac{\xi_l}{W_l}\right|\right)\right)^k, \tag{2.2}$$

где $c(k)=(4e/3+1)^k(k!)^{1/2}\leq 5^k(k!)^{1/2}$.

Доказательство. Если $n\leq 4k$, то по неравенству Коши-Буняковского мы получим

$$\left|\frac{S_n}{W_n}\right|^k \leq \left|\frac{\sqrt{n\sum_{k=1}^n X_n^2}}{W_n}\right|^k \leq (\max(1,d))^k n^{k/2} \leq (\max(1,d))^k 2^k k^{k/2}$$
$$\leq (\max(1,d))^k c(k).$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемым неравенством $k! > 2k^k/e^k$. В результате мы получаем следующее неравенство

$$\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{W_n}\right|^k \leq c(k),\ \text{ для } 1\leq n\leq 4k,$$

совпадающее с 2.2.

Предположим теперь, что $n>4k$. В этом случае $1/n_r\leq 4r/(3n)$ для любого r такого, что $r\leq k$. Действительно, $n_r=[n/r]-\alpha$, где $0\leq\alpha<1$. Поэтому

$$\frac{1}{n_r}=\frac{r}{n-r\alpha}=\frac{r}{n}\left(\frac{1}{1-r\alpha/n}\right)\leq\frac{r}{n}\left(\frac{1}{1-r/n}\right)<\frac{r}{n}\left(\frac{1}{1-k/(4k)}\right)=\frac{4r}{3n}.$$

Обозначим

$$M_n=\max\left\{1,\max_{1\leq l\leq n}\mathbb{E}\frac{|\xi_l|}{W_l}\right\}. \tag{2.3}$$

По неравенству (2.1) мы получим

$$
\begin{aligned}
\Big|\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{W_n}\right)^k\Big| &= \Big|\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^r m_i=k,\\ m_i\ge 1}} C_n^r\frac{k!}{m_1!\dots m_r!}\mathbb{E}\frac{X_1^{m_1}\dots X_r^{m_r}}{W_n^k}\Big| \\
&\le \sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^r m_i=k,\\ m_i\ge 1}} C_n^r n_r^{-r}\left(\frac{k!}{m_1!\dots m_r!}\right)^{1/2}(\max(1,d))^r\left(\mathbb{E}\Big|\frac{\xi_{n_r}}{W_{n_r}}\Big|\right)^s \\
&\le (\max(1,d))^k M_n^k (k!)^{1/2}\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^r m_i=k,\\ m_i\ge 1}} C_n^r\frac{k!}{m_1!\dots m_r!} \\
&\le (\max(1,d))^k M_n^k (k!)^{1/2}\sum_{r=1}^{k}(4/3)^r\frac{r^r}{r!}C_{k-1}^{r-1} \\
&\le (\max(1,d))^k M_n^k (k!)^{1/2}\sum_{r=1}^{k}(4e/3)^r C_{k-1}^{r-1} \\
&\le \frac{2e}{3}(\max(1,d))^k M_n^k (k!)^{1/2}\left(1+\frac{4e}{3}\right)^{k-1} \\
&< c(k)(\max(1,d))^k M_n^k.
\end{aligned}
$$

В доказательстве было использовано то, что число решений уравнения $m_1 + \dots m_r = k$ в натуральных числах равно C_{k-1}^{r-1}. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Используя постоянную M_n, определенную в (2.3), для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$
\mathbb{E}\exp\left\{\frac{(S_n/V_n)^2}{(\max(1,d))^2 4(1+4e/3)^2 M_n^2}\right\} \le 2 \qquad (2.4)
$$

и для любого $t > 0$ выполняется неравенство

$$
\mathbb{E}\exp\left\{t\frac{|S_n|}{V_n}\right\} \le 2\exp\{(1+(4e)/3)^2 M_n^2 t^2\} \qquad (2.5)
$$

Доказательство. Заметим, что

$$
\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big| = \Big|\frac{S_n}{W_n}\frac{W_n}{V_n}\Big| \le \max(1,d)\Big|\frac{S_n}{V_n}\Big|.
$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$\lambda_0 = \frac{1}{4(1+4e/3)^2 M_n^2 \max(1, d^2)}$$

В силу (2.2) и $(2k)! \le (2^k k!)^2$ мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\exp\{\lambda_0 (S_n/V_n)^2\} \le \mathbb{E}\exp\{\lambda_0 \max(1,d)^2 (S_n/W_n)^2\} \\
&= \mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 \max(1,d)^2 (S_n/W_n)^2)^k}{k!} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0^k ((2k)!)^{1/2} (1+4e/3)^{2k} \max(1,d)^{2k} M_n^{2k}}{k!} \\
&< \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k ((2k)!)^{1/2} (1+4e/3)^{2k} M_n^{2k} \max(1,d)^{2k} = 2
\end{aligned}$$

(2.4) доказано. Далее, с помощью элементарного неравенства $2|ab| \le a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$ мы получим

$$t\frac{|S_n|}{V_n} = (2\lambda_0)^{1/2}\left|\frac{S_n}{V_n}\right| \frac{t}{(2\lambda_0)^{1/2}} \le 1/2(2\lambda_0)\left|\frac{S_n}{V_n}\right|^2 + 1/2\frac{t^2}{2\lambda_0}$$

По неравенству (2.4) мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\exp\left\{t\left|\frac{S_n}{V_n}\right|\right\} \le \mathbb{E}\left(\exp\left\{\lambda_0\left|\frac{S_n}{V_n}\right|^2\right\}\right)\exp\left\{\frac{t^2}{4\lambda_0}\right\} \\
&\le 2\exp\left\{\frac{t^2}{4\lambda_0}\right\} = 2\exp\{\max(1,d^2)(1+4e/3)^2 M_n^2 t^2\}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если последовательность* $\{S_n/V_n\}_{n\ge1}$ *слабо компактна, то существуют такие постоянные* $c_0 > 0, C > 0$ *такие, что*

$$\sup_{n\ge1}\mathbb{E}\exp\left\{c_0\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2\right\} = C < \infty \tag{2.6}$$

Доказательство. По теореме 1.1 из параграфа 1 слабая компактность последовательности $\{S_n/V_n\}_{n\ge1}$ равносильна слабой компактности последовательности $\{\xi_n/W_n\}_{n\ge1}$. В [18] доказано, что слабая компактность последовательности $\{\xi_n/W_n\}_{n\geq 1}$ влечет ограниченность последовательности $\{M_n\}_{n\geq 1}$ из (2.3), т.е.

$$M = \sup_{n\geq 1} M_n < \infty. \tag{2.7}$$

Положим

$$c_0 = \frac{1}{4d\max(1,d)(1+4e/3)^2 M^2}$$

Заменив M_n на M в доказательстве леммы 2.3, мы получим, что

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\exp\{c_o \left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2\} \leq 2.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ была слабо компактной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$\sup_{n\geq 1} \Big| \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i X_j}{V_n^2}\right) \Big| < \infty, \tag{2.8}$$

$$\sup_{n\geq 1} n^2 \mathbb{E}\frac{X_i X_j}{W_n^2} < \infty. \tag{2.9}$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна. По лемме 2.4 существует постоянная $c_o > 0$ для которой выполняется условие (2.6). Из этого условия, в частности, следует, что

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2 < \infty. \tag{2.10}$$

Запишем $\mathbb{E}(S_n/V_n)^2$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2 &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{V_n^2}\left(\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j\right)\right) \\ &= 1 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}\frac{X_i X_j}{V_n^2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отсюда и из (2.10) следует (2.8).

По теореме 1.3 из первого параграфа слабая компактность последовательности $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ влечет слабую компактность последовательности $\{\xi_n/W_n\}_{n\geq 1}$. Известно (лемма 2.4), что слабая компактность последовательности $\{\xi_n/W_n\}_{n\geq 1}$ влечет существование постоянной $c_0 > 0$ такой, что

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E} \exp\{c_0(\xi_n/W_n)^2\} \leq 2.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E} \left(\frac{\xi_n}{W_n}\right)^2 < \infty \tag{2.12}$$

Запишем $\mathbb{E}(\xi_n/W_n)^2$ в следующем виде

$$\mathbb{E}\left(\frac{\xi_n}{W_n}\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{W_n^2}\left(\sum_{k=1}^n Y_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Y_iY_j\right)\right)$$
$$= 1 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}\frac{Y_iY_j}{W_n^2} = 1 + n(n-1)\mathbb{E}\frac{Y_iY_j}{W_n^2}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathbb{E}(Y_iY_j/W_n^2) = \mathbb{E}(Y_1Y_2/W_n^2)$ для любых $1 \leq i < j \leq n$. Отсюда и из (2.12) следует, что

$$\sup_{n\geq 1} n(n-1)\left|\mathbb{E}\frac{Y_1Y_2}{W_n^2}\right| < \infty. \tag{2.13}$$

Убедимся, что $\mathbb{E}(Y_1Y_2/W_n^2) \geq 0$. Воспользуемся легко проверяемым

$$\int_0^\infty \exp\{-\lambda a\} d\lambda = \frac{1}{a}, \text{ для любого } a > 0.$$

Положим $a = W_n^2$, мы получим

$$\mathbb{E}\frac{Y_1Y_2}{W_n^2} = \mathbb{E}Y_1Y_2\int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda W_n^2\}d\lambda = \int\limits_0^\infty \mathbb{E}(Y_1Y_2\exp\{-\lambda W_n^2\})d\lambda$$
$$= \int\limits_0^\infty \mathbb{E}(Y_1\exp\{-\lambda Y_1^2\}Y_2\exp\{-\lambda Y_2^2\}\exp\{-\lambda\sum_{j=3}^n Y_j^2\})d\lambda$$
$$= \int\limits_0^\infty \mathbb{E}(Y_1\exp\{-\lambda Y_1^2\})\mathbb{E}(Y_2\exp\{-\lambda Y_2^2\})\mathbb{E}(\exp\{-\lambda\sum_{j=3}^n Y_j^2\})d\lambda$$
$$= \int\limits_0^\infty (\mathbb{E}(Y_1\exp\{-\lambda Y_1^2\}))^2\mathbb{E}(\exp\{-\lambda\sum_{j=3}^n Y_j^2\})d\lambda \geq 0.$$

Условие (2.13) можно записать в виде условия (2.9).

Достаточность. Предположим теперь, что выполнено условие (2.8). Тогда, учитывая (2.11), $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}(S_n/V_n)^2 = A < \infty$. По неравенству Маркова мы получим

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{V_n} > \lambda\right) \leq \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\mathbb{E}(S_n/V_n)^2}{\lambda^2} \leq \lim_{\lambda\to\infty}\frac{A}{\lambda^2} = 0.$$

По критерию (см. часть 1.1, (1.1)) последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна. Если выполнено условие (2.9), то

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(\frac{\xi_n}{W_n}\right)^2 = B < \infty.$$

Снова, по неравенству Маркова мы получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{W_n}\right| > \lambda\right) \leq \lim_{\lambda\to\infty}\frac{B}{\lambda^2} = 0.$$

Последовательность $\{\xi_n/W_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна. Следовательно, по теореме 1.3 из параграфа 1 последовательность $\{S_n/W_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна. Теорема доказана.

§ 3

Слабая компактность самонормированных сумм независимых многотипных случайных величин

3.1 Постановка задачи

Пусть независимые случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение 3.1. *Распределения случайных величин X и Y принадлежат одному типу, если $\mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{cY + d \leq x\}$ для всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ для некоторых $c, d \in \mathbb{R}$.*

Предположим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ распределение Y_n принадлежит одному из l типов невырожденных случайных величин. Напомним, что распределение случайной величины X называется вырожденным, если X равняется константе п.в. (п.в. по отношению к мере $\mathbb{P}$). Удобно считать, что существуют невырожденные случайные величины $Z_1, \dots, Z_l$ с распределениями различных l типов, и каждая случайная величина Y_n имеет распределение совпадающие с распределением одной из случайных величин $Z_1, \dots, Z_l$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $Y_1, \dots, Y_n, n \in \mathbb{N}$, могут быть разбиты на l непересекающихся множеств $\mathcal{M}_{1,n}, \dots .\mathcal{M}_{l,n}$. Случайная величина Y_k принадлежит множеству $\mathcal{M}_{i,n}$ тогда и только тогда, когда случайные величины Y_k и Z_i имеют одинаковые распределения. Набор индексов $\{1, \ldots, n\}$ может быть разбит на l непересекающихся множеств $\mathcal{L}_{1,n}, \ldots, \mathcal{L}_{l,n}$. Индекс k принадлежит множеству $\mathcal{L}_{i,n}$ тогда и только тогда, когда $Y_k \in \mathcal{M}_{i,n}$. Мы предполагаем также, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{i,n}}{n} = p_i, \; 0 < p_i < 1, \text{ для всех } i = 1, \ldots, l. \tag{3.1}$$

Смысл этого условия состоит в том, чтобы случайные величины каждого из типов вносили заметный вклад в отношение $S_n/V_n, n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{c_n\}_{n\geq 1}$ - последовательность действительных чисел, такая что $0 < c = \inf_{n\geq 1} c_k < d = \sup_{n\geq 1} c_n < \infty$. С помощью случайных величин $X_n = c_n Y_n, n \in \mathbb{N}$, построим самонормированные суммы $S_n/V_n, n \in \mathbb{N}$, где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ и $V_n^2 = X_1^2 + \cdots + V_n^2$. Чтобы выражение S_n/V_n имело смысл для любых случайных величин, положим $S_n/V_n = 0$, когда $V_n = 0$.

В данной главе доказывается условие слабой компактности самонормированных сумм $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ и, кроме того, доказывается, что слабая компактность рассматриваемых самонормированных сумм эквивалента слабой компактности t-статистики Стьюдента

$$t_n = \frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Напомним (см. введение), что слабая компактность последовательности $\{(S_n - \xi_n)/V_n\}_{n\geq 1}$ для некоторых $\xi_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ равносильна условию

$$\lim_{L\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}\{|S_n - \xi_n| > LV_n\} = 0. \tag{3.2}$$

3.2 Вспомогательные леммы

По аналогии с первым параграфом для каждого $i = 1, \dots, l$ определим функции

$$G_i(r) = \mathbb{P}(|Z_i| > r), K_i(r) = \frac{\mathbb{E}(Z_i^2; |Z_i| < r)}{r^2},$$
$$M_i(r) = \frac{\mathbb{E}(Z_i; |Z_i| < r)}{r}, Q_i(r) = G_i(r) + K_i(r), r > 0.$$

Продолжим эти функции на $[0, \infty)$ следующим образом

$$G_i(0) = \mathbb{P}(|Z_i| > 0), K_i(0) = 0, M_i(0) = 0.$$

Сначала исследуем некоторые свойства функций $Q_i(r), r > 0, i = 1, \dots, l$. Функция $Q_i(r), r > 0$, может быть записана следующим образом

$$Q_i(r) = \mathbb{P}(|Z_i| > r) + \frac{\mathbb{E}(Z_i^2; |Z_i| \le r)}{r^2} = \frac{\mathbb{E}(\min(Z_i^2, r^2))}{r^2}.$$

С помощью интегрирования по частям мы получим для $r > 0$,

$$\begin{aligned} Q_i(r) &= \frac{1}{r^2} \int\limits_0^\infty \min(y^2, r^2) d(1 - G_i(y)) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\int\limits_0^r y^2 dG_i(y) + \int\limits_r^\infty r^2 dG_i(y) \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(r^2 G_i(r) - \int_0^r G_i(y) dy^2 - r^2 G_i(r) \right) = \frac{2}{r^2} \int_0^r y G_i(y) dy. \end{aligned}$$

Отметим, что $Q_i(r) = Q_i(0) = \mathbb{P}(|Z_i| > 0) > 0$ для $r \in [0, r_{i,0}]$, где $r_{i,0} = \inf(r > 0 : G_i(r) < G_i(0))$. Для $r > r_{i,0}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i(r)}{dr} &= -\frac{2}{r^3} \int_0^r 2G_i(y) y dy + \frac{1}{r^2} 2r G_i(r) \\ &< -\frac{2}{r^3} G_i(r) \int_0^r 2y dy + \frac{2}{r} G_i(r) = -\frac{2}{r} G_i(r) + \frac{2G_i(r)}{r} = 0. \end{aligned}$$

Функция $Q_i(r), r > r_{i,0}$, непрерывная и строго убывающая, так как $Q_i'(r) < 0$ для $r > r_{i,0}$. Для любого $\lambda > 0$ и $n > (\lambda Q_i(0))^{-1}$ существует число $a_{i,n}(\lambda) > r_{i,0}$ такое, что

$$Q_i(a_{i,n}(\lambda)) = \frac{1}{\lambda n}. \tag{3.3}$$

Отметим, что $a_{i,n}(\lambda) < a_{i,n'}(\lambda')$ если $n \leq n', \lambda \leq \lambda', n'\lambda' > n\lambda > 1/Q_i(0)$. Обозначим $\min(a, b) = a \wedge b$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $m_{i,n}$ - число элементов в $\mathcal{L}_{i,n}$ и

$$a_n^2(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda),$$

$$U_{i,n}(\lambda) = \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 \wedge a_{i,m_{j,n}}^2(\lambda)), U_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} U_{i,n}(\lambda),$$

$$\overline{U}_{i,n}(\lambda) = \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} (Y_k^2 \wedge a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)), \overline{U}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \overline{U}_{i,n}(\lambda).$$

для всех $\lambda > 0$ и $m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i = 1, \ldots, l$.

Лемма 3.1. *Для любого* $\lambda > 0, \delta \in (0, 1/\sqrt{\lambda})$ *и* $m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i = 1, \ldots, l$, *имеют место неравенства*

$$\mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \geq \frac{(1 - \lambda\delta^2)^2}{1 + \lambda}, \tag{3.4}$$

$$\mathbb{P}\{V_n^2 > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \geq \frac{(1 - \lambda\delta^2)^2}{1 + \lambda} \tag{3.5}$$

*Доказательство.*Нам достаточно доказать неравенство (3.4) так как $U_n(\lambda) \leq V_n^2$. Заметим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda) &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}(Y^2 \wedge a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,n}} a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda) Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \\
&= \sum_{i=1}^{l} a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda) m_{i,n} Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{l} a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Вспомним, что из (3.3) имеет место $m_{i,n}Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) = 1/\lambda$. С помощью неравенства $a^4 \wedge b^4 \leq b^2(a^2 \wedge b^2)$ для $a, b \in \mathbb{R}$ мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}(Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda)))^2 = \sum_{m,k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}((Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,m}}(\lambda))(Y_m^2 \wedge a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))) \\
&\leq a^2_{i,m_{i,n}} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}(Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,m}}(\lambda)) + \sum_{m\neq k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}((Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,m}}(\lambda))(Y_m^2 \wedge a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))) \\
&= a^2_{i,m_{i,n}} m_{i,n} Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) + 2C^2_{m_{i,n}} a^4_{i,m_{i,n}}(\lambda) Q_i^2(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \\
&\leq a^4_{i,m_{i,n}} m_{i,n} Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) + a^4_{i,m_{i,n}}(\lambda) m^2_{i,n} Q_i^2(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \\
&= a^4_{i,m_{i,n}}(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right).
\end{aligned}$$

Мы также имеем

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}(Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda)) = a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda) m_{i,n} Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda))\right) = \frac{a^2_{i,m_{i,n}}}{\lambda}.$$

Из этого следует

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{U}_n^2(\lambda) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}(Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))^2 = \sum_{i=1}^{l}\mathbb{E}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}(Y_k^4 \wedge a^4_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \\
&+ \sum_{1\leq i\neq j\leq l}\mathbb{E}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}(Y_k^2 \wedge a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))\mathbb{E}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{j,n}}(Y_k^2 \wedge a^2_{j,m_{j,n}}(\lambda)) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\mathbb{E}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}(Y_k^4 \wedge a^4_{i,m_{i,n}}(\lambda)) + \sum_{1\leq i\neq j\leq l}\frac{a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))}{\lambda}\frac{a^2_{j,m_{j,n}}(\lambda))}{\lambda} \qquad (3.7) \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right)\sum_{i=1}^{l} a^4_{i,m_{i,n}}(\lambda) + \sum_{1\leq i\neq j\leq l}\frac{a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))}{\lambda}\frac{a^2_{j,m_{j,n}}(\lambda))}{\lambda} \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right)(\sum_{i=1}^{l} a^2_{i,m_{i,n}}(\lambda))^2.
\end{aligned}$$

Для доказательства (3.4) нам необходимо обратное неравенство Чебышева

$$\mathbb{P}\{Y \geq x\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + x^2}, x > 0,$$

для любых случайных величин Y с $\mathbb{E}Y = 0$ и $\mathbb{E}Y^2 = \sigma^2$. С помощью указанного неравенства

$$U_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k \in \mathcal{L}_{i,m_{i,n}}} (X_k^2 \wedge a_{i,m_{i,n}}^2) \geq (c \wedge 1)\overline{U}_n(\lambda)$$

и (3.6) мы получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \geq \mathbb{P}\{\overline{U}_n(\lambda) > \lambda\delta^2\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)\} \\
&= \mathbb{P}\{\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda) - \overline{U}_n(\lambda) < (1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda) - \overline{U}_n(\lambda) \geq (1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)\} \\
&\geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}{\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2 + ((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2} \\
&= \frac{((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}{\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2 + ((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}.
\end{aligned}$$

Из того, что $\mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda) - \mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2 + ((1-\lambda\delta^2)\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda)))^2 \leq \mathbb{E}(\overline{U}_n(\lambda))^2$ следует

$$\mathbb{P}\{U_n(\lambda) > \delta^2(c^2 \wedge 1)a_n^2(\lambda)\} \geq (1-\lambda\delta^2)^2 \frac{(\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}{\mathbb{E}\overline{U}_n^2(\lambda)}.$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$\frac{(\mathbb{E}\overline{U}_n(\lambda))^2}{\mathbb{E}\overline{U}_n^2(\lambda)} \geq \frac{1}{1+\lambda} \frac{(\sum_{i=1}^{l} a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda))^2}{(\sum_{i=1}^{l} a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda))^2} = \frac{1}{1+\lambda}.$$

Неравенство (3.4) и лемма доказаны.

Лемма 3.2. *Если $\lambda > 0, L > 0, m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i = 1, \ldots, l$, удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{L^2\lambda} + 1 - \left(1 - \frac{1}{m_{i,n}\lambda}\right)^{m_{i,n}} > 0 \tag{3.8}$$

тогда

$$\mathbb{P}\{V_n > lL(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \leq 1 - \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{l}{L^2\lambda} + 1 - \left(1 - \frac{1}{m_{i,n}\lambda}\right)^{m_{i,n}}\right). \tag{3.9}$$

Доказательство. Обозначим

$$X_{i,n}^* = \max\{|Y_k| : k \in \mathcal{L}_{i,n}\}, V_{i,n}^2 = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k^2, \overline{V}_{i,n}^2 = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} Y_k^2.$$

Так как $\overline{V}_{i,n}^2 = \overline{U}_{i,n}(\lambda)$ на множестве $\{X_{i,n}^* \le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}$ и $V_{i,n}^2 \le (d^2 \vee 1)\overline{V}_{i,n}^2(\lambda)$ имеем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{V_{i,n}^2 > L^2(d^2 \wedge 1)a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\} \le \mathbb{P}\{\overline{V}_{i,n}^2 \ge L^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\} \\
&= \mathbb{P}\{\overline{U}_{i,n}(\lambda) \ge L^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda), X_{i,n}^* \le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} \\
&+ \mathbb{P}\{\overline{U}_{i,n}(\lambda) \ge L^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda), X_{i,n}^* > a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} \\
&\le \mathbb{P}\{\overline{U}_{i,n}(\lambda) \ge L^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\} + \mathbb{P}\{X_{i,n}^* > a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что $\mathbb{E}\overline{U}_{i,n}(\lambda) = a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda) m_{i,n} Q_i(a_{i,m_{i,n}})(\lambda)) = a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)/\lambda$. Последнее неравенство выполняется по (3.3). По неравенству Чебышева имеем

$$\mathbb{P}\{\overline{U}_{i,n}(\lambda) \ge L^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\} \le \frac{\mathbb{E}(\overline{U}_{i,n}(\lambda))}{L^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)} \le \frac{1}{L^2\lambda}.$$

Так как случайные величины $X_k, k \in \mathcal{L}_{i,n}$ независимые и одинаково распределенные, мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_{i,n}^* > a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} &= 1 - \mathbb{P}\{X_{i,n}^* \le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} \\
&= 1 - \prod_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{P}\{|X_k| \le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} \\
&= 1 - \prod_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (1 - \mathbb{P}\{|X_k| > a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}) \\
&= 1 - (1 - G_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)))^{m_{i,n}} \\
&\le 1 - (1 - Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)))^{m_{i,n}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{m_{i,n}\lambda}\right)^{m_{i,n}}.
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\mathbb{P}\{V_{i,n}^2 > L^2(d^2 \wedge 1)a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\} \le \frac{1}{L^2\lambda} + 1 - \left(1 - \frac{1}{m_{i,n}\lambda}\right)^{m_{i,n}}.$$

Требуемое неравенство (3.9) следует из $V_n^2 = V_{1,n}^2 + \cdots + V_{l,n}^2$ и

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{V_n > lL(d\vee 1)a_n(\lambda)\} = 1 - \mathbb{P}\{V_n^2 \le l^2L^2(d^2\vee 1)a_n^2(\lambda)\}\\
&\le 1 - \mathbb{P}\{V_{i,n}^2 \le l^2L^2(d^2\vee 1)a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda), i=1,\dots,l\}\\
&\le 1 - \prod_{i=1}^{l}\mathbb{P}\{V_{i,n}^2 \le L^2(d^2\vee 1)a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\}\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{l}\mathbb{P}\{V_{i,n}^2 > L^2(d^2\vee 1)a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)\}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$T_{i,n}(\lambda) = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k \mathbb{1}_{\{|Y_k|\le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}, T_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} T_{i,n}(\lambda),$$

$$R_{i,n}(\lambda) = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k \mathbb{1}_{\{|Y_k|> a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}, R_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} R_{i,n}(\lambda),$$

$$J_{i,n}(\lambda) = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{1}_{\{|Y_k|> a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}, J_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} J_{i,n}(\lambda).$$

Лемма 3.3. *Для любых* $\lambda > 0, L > 0, m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i = 1,\dots,l,$ *имеют место следующие неравенства*

$$\mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \le \frac{l}{\lambda L^2}, \tag{3.10}$$

$$\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > lL(c\wedge 1)a_n(\lambda)\} \le \frac{ld}{L^2(c^2\wedge 1)\lambda}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Используя неравенство Коши-Буняковского $|R_n(\lambda)| \le V_n\sqrt{J_n(\lambda)}$ и неравенство Чебышева мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \le \mathbb{P}\{J_n(\lambda) > L^2\} \le \frac{\mathbb{E}J_n(\lambda)}{L^2}\\
&= \frac{1}{L^2}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}\mathbb{P}\{|Y_k| > a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} = \frac{1}{L^2}\sum_{i=1}^{l} m_{i,n}G_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \le \frac{l}{\lambda L^2}.
\end{aligned}$$

Вспомним, что $m_{i,n}G_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \le m_{i,n}Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) = 1/\lambda$ по (3.3). Неравенство (3.10) доказано. Теперь докажем неравенство (3.11). Отметим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|T_{i,n}(\lambda) - \mathbb{E}T_{i,n}(\lambda)|^2 &= \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}\big|(X_k \mathbb{1}_{\{|Y_k|\le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}) - \mathbb{E}X_k\mathbb{1}_{\{|Y_k|\le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}\big|^2 \\
&\le \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k|\le a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\}}) = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k^2 a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda) K_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \\
&\le d a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda) m_{i,n} K_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \le d a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda) m_{i,n} Q_i(a_{i,m_{i,n}}(\lambda)) \\
&= \frac{d a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

С помощью неравенства Чебышева получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > lL(c\wedge 1)a_n(\lambda)\} \\
&\le \sum_{i=1}^{l} \mathbb{P}\{|T_{i,n}(\lambda) - \mathbb{E}T_{i,n}(\lambda)| > L(c\wedge 1) a_{i,m_{i,n}}(\lambda)\} \\
&\le \sum_{i=1}^{l} \frac{|T_{i,n}(\lambda) - \mathbb{E}T_{i,n}(\lambda)|^2}{L^2(c^2\wedge 1) a_{i,m_{i,n}}^2(\lambda)} \le \frac{ld}{L^2(c^2\wedge 1)\lambda}.
\end{aligned}$$

Неравенство (3.11) и лемма доказаны.

Лемма 3.4. *Для всех* $\lambda > 0, L > 0, \delta \in (0, 1/\sqrt{\lambda}), m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i = 1, \ldots, l$, *имеет место неравенство*

$$\mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2lLV_n\} \le \frac{1}{\lambda}\left(\frac{l}{L^2(c^2\wedge 1)\delta^2} + \frac{l}{L^2}\right) + 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{1+\lambda} \quad (3.12)$$

Доказательство. Так как $S_n = T_n(\lambda) + R_n(\lambda)$ мы получаем

$$\begin{aligned}
&\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2lLV_n\} \subseteq \{|T_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > lLV_n\} \cup \{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \\
&= (\{|T_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > lLV_n\} \cap (\{V_n > \delta(c\wedge 1)a_n(\lambda)\} \cup \{V_n \le \delta(c\wedge 1)a_n(\lambda)\})) \\
&\cup \{|R_n(\lambda)| > LV_n\} \subseteq \{|T_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > lL\delta(c\wedge 1)a_n(\lambda)\} \\
&\cup \{V_n \le \delta(c\wedge 1)a_n(\lambda\} \cup \{|R_n(\lambda)| > LV_n\}.
\end{aligned}$$

Из (3.5), (3.10), (3.11) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|S_n-\mathbb{E}T_n(\lambda)|>2lLV_n\} &\le \mathbb{P}\{|T_n-\mathbb{E}T_n(\lambda)|>lL\delta(c\wedge 1)a_n(\lambda)\}\\ &+\mathbb{P}\{V_n\le\delta(c\wedge 1)a_n(\lambda)\}+\mathbb{P}\{|R_n(\lambda)|>LV_n\}\\ &\le\frac{ld}{L^2\delta^2(c^2\wedge 1)\lambda}+1-\frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{1+\lambda}+\frac{l}{\lambda L^2}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ *- последовательность независимых случайных величин с функцией распределения* $\mathbb{P}\{Z_i<x\}, x\in\mathbb{R}$. *С помощью постоянных* $c_n, n\in\mathbb{N}$, *построим случайные величины* $\eta_n=c_n\xi_n, \zeta_n=\eta_1+\dots+\eta_n, \psi_n^2=\eta_1^2+\dots+\eta_n^2, n\in\mathbb{N}$.
(i) Если $\mathbb{E}\xi_1^2<\infty$ *тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta_n-\mathbb{E}\zeta}{n}=0 \text{ п.в.,} \tag{3.13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n-\mathbb{E}\psi_n}{n}=0 \text{ п.в.} \tag{3.14}$$

(ii) Если $\mathbb{E}\eta_1^2=\infty$ *тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta_n^2}{n\psi_n^2}=0 \text{ п.в.} \tag{3.15}$$

Доказательство. (i). Утверждение (3.13) следует из усиленного Закона Больших Чисел в форме Колмогорова так как

$$\mathbb{E}(\eta_n-\mathbb{E}\eta_n)^2\le\mathbb{E}\eta_n^2\le d^2\mathbb{E}\xi_1^2 \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(\eta_n-\mathbb{E}\eta_n)^2}{n^2}<\infty.$$

Для доказательства утверждения (3.14) мы немного изменим широко известное доказательство усиленного закона больших чисел Колмогорова для одинаково распределенных случайных величин

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_n^2\mathbb{1}_{\{\xi_n^2\le n\}}-\mathbb{E}(\eta_n^2\mathbb{1}_{\{\xi_n^2\le n\}})\right)=0 \text{ п.в.} \tag{3.16}$$

Необходимо проверить условие Колмогорова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\eta_n^2 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}} - \mathbb{E}(\eta_n^2 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}}))^2}{n^2} < \infty. \tag{3.17}$$

Традиционная техника дает

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\eta_n^2 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}} - \mathbb{E}(\eta_n^2 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}}))^2}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\eta_n^4 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}})}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \mathbb{E}(\xi_n^4 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}})}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \le n\}})}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{k-1 < \xi_1^2 \le k\}}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4}{n^2} \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \le 1\}}) + \sum_{k=2}^{\infty} (\sum_{n=k}^{\infty} \frac{d^2}{n^2}) \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{k-1 < \xi_1^2 \le k\}}) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4}{n^2} \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \le 1\}}) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2d^4}{k} \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{k-1 < \xi_1^2 \le k\}}) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4}{n^2} \mathbb{E}(\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \le 1\}}) + 2d^2 \mathbb{E}\xi_1^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Условие (3.17) выполнено и значит имеет место утверждение (3.16). Мы также имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\eta_k^2 \mathbb{1}_{\{\xi_k^2 > k\}}) \le \lim_{n\to\infty} \frac{d^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_1^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 > k\}}) = 0. \tag{3.18}$$

Потом мы имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\eta_n^2 \ne \eta_n^2 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n^2 > n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_1^2 > n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{k < \xi_1^2 \le k+1\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}\{k < \xi_1^2 \le k+1\} \le \mathbb{E}\xi^2 < \infty
\end{aligned}$$

и таким образом $\mathbb{P}\{\cap_{n=1}^{\infty} \{\eta_n^2 \ne \eta_n^2 \mathbb{1}_{\{\xi_n^2 \le n\}}\}\} = 1$. Отсюда, (3.16) и (3.18) следует (3.14).

(ii). Так как $\mathbb{E}\xi_1^2 = \infty$, из усиленного закона больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин следует

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \ge \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c^2 \xi_k^2 \mathbb{1}_{\{\xi^2 \le L\}} = c^2 \mathbb{E}(\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \le r\}}) \text{ п.в.}$$

для любых $r \in \mathbb{N}$. Так как $\mathbb{E}(\xi_1^2 \mathbb{1}_{\{\xi_1^2 \le r\}}) \to \infty$ при $r \to \infty$ выполнено следующее

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 = \infty \text{ п.в.} \tag{3.19}$$

Для всех $L > 0$ по неравенству Коши-Буняковского мы имеем

$$\begin{aligned} |\zeta_n| &= \Big| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mathbb{1}_{\{|\xi_k| \le L\}} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mathbb{1}_{\{|\xi_k| > L\}} \Big| \le dnL + \Big| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \mathbb{1}_{\{|\xi_k| > L\}} \Big| \\ &\le dnL + \psi_n \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{|\xi_k| > L\}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\frac{|\zeta_n|}{\sqrt{n}\psi_n} \le \frac{dL}{\psi_n/\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{|\xi_k| > L\}} \right)^{1/2}.$$

По (3.19) и усиленному закону больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин в форме Колмогорова мы получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\zeta_n|}{\sqrt{n}\psi} \le (\mathbb{P}\{|\xi_1| > L\})^{1/2} \text{ п.в.}$$

Это влечет за собой (3.15) так как $\mathbb{P}\{|\xi_1| > L\} \to 0$ при $L \to \infty$. Лемма доказана.

3.3 Доказательства основных утверждений

Для начала докажем, что последовательность t-статистик Стьюдента слабо компактна тогда и только тогда, когда последовательность самонормированных сумм обладает этим свойством.

Теорема 3.1. *Последовательность $\{t_n\}_{n\ge1}$ слабо компактна тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\ge1}$ слабо компактна.*

Доказательство. Запишем t-статистику Стьюдента t_n в следующем виде

$$t_n = \frac{S_n}{V_n}\sqrt{\frac{1-1/n}{1-S_n^2/(nV_n^2)}}. \tag{3.20}$$

Если последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна, то последовательность $\{S_n/V_n\}$ тоже слабо компактна, так как

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}}\frac{|S_n|}{V_n} \leq |t_n| \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

Из (3.20) следует, что последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна, если последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n^2}{nV_n^2} \leq A \text{ п.в.} \tag{3.21}$$

для некоторых чисел $A, 0 \leq A < 1$. Остается доказать только справедливость (3.21). По неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\frac{1}{nV_n^2}|S_n|^2 = \Big|\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{nV_n^2}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k\Big|^2 \leq \frac{n}{nV_n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = 1. \tag{3.22}$$

Если $\mathbb{E}Z_i^2 = \infty$ для некоторых $i = 1, \ldots, l$ тогда по (3.15) мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}V_n}\Big|\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k\Big| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m_{i,n}}V_{i,n}}\Big|\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k\Big| = 0 \text{ п.в.} \tag{3.23}$$

Здесь мы воспользовались неравенствами $m_{i,n} \leq n$ и $V_{i,n} \leq V_n$. Если $\mathbb{E}Z_i^2 < \infty$ и $\mathbb{E}Z_i = 0$ для некоторых $i = 1, \ldots, l$, тогда по (3.13) мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m_{i,n}}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k = 0 \text{ п.в.}$$

По усиленному закону больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин в форме Колмогорова имеем

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{m_{i,n}}V_{i,n}^2 \geq \lim_{n\to\infty}\frac{c^2}{m_{i,n}}\overline{V}_{i,n}^2 = c^2\mathbb{E}Z_i^2 \text{ п.в.} \tag{3.24}$$

и следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}V_n} |\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\overline{V}_{i,n}/\sqrt{m_{i,n}}} |\frac{1}{m_i, n} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k| = 0 \text{ п.в} \tag{3.25}$$

Из (3.22), (3.23) и (3.25) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}V_n} \le \limsup_{n\to\infty} |\sum_{1\le i\le l}{}' \frac{1}{\sqrt{n}V_n} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k|$$

где суммирование $\sum'$ проходит только по индексами $i = 1, \ldots, l$ для которых $\mathbb{E}Z_i^2 < \infty$ и $\mathbb{E}Z_i \ne 0$. Рассмотрим наихудший вариант, когда $\mathbb{E}Z_i^2 < \infty$ и $\mathbb{E}Z_i \ne 0$ для всех $i = 1, \ldots, l$. По (3.13) мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m_{i,m}} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k - \mathbb{E}X_k) = 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, l.$$

Отсюда и из (3.24) получаем, что

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}V_n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{V_{i,n}/\sqrt{m_{i,n}}} \frac{1}{m_{i,n}} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k - \mathbb{E}X_k) + \frac{1}{\sqrt{n}V_n} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}X_k \right) \Big| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}V_n} \Big| \sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}X_k \Big| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}V_n} \Big| \sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k \mathbb{E}Z_i \Big|.
\end{aligned}$$

Запишем V_n^2 в следующем виде

$$\begin{aligned}
V_n^2 &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 - \mathbb{E}X_k^2 + \mathbb{E}X_k^2) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 - \mathbb{E}X_k^2)}{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}X_k^2} + 1 \right) \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k^2 E Z_i^2 \\
&\geq \min_{1\leq i\leq l} \left(\frac{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 - \mathbb{E}X_k^2)}{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}X_k^2} + 1 \right) \sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}c_k^2 Z_i^2 \\
&= A_n \sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}c_k^2 Z_i^2,
\end{aligned}$$

где $A_n = \min_{1\leq i\leq l} \left(\frac{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 - \mathbb{E}X_k^2)}{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}X_k^2} + 1 \right)$. В результате получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}V_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{A_n}} \frac{|\sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k \mathbb{E}Z_i|}{(n\sum_{i=1}^{l} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}c_k^2 Z_i^2)^{1/2}}. \tag{3.26}$$

Можно заметить, что $A_n \to 1$ при $n \to \infty$. Действительно, по (3.14) для всех $i = 1, \ldots, l$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 - \mathbb{E}X_k^2)}{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} \mathbb{E}X_k^2} + 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{m_{i,n}}{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k^2} \frac{1}{m_{i,n}} \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} (X_k^2 - \mathbb{E}X_k^2) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие неравенства

$$\frac{1}{d^2} = \frac{m_{i,n}}{d^2 m_{i,n}} \leq \frac{m_{i,n}}{\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k^2} \leq \frac{m_{i,n}}{c^2 m_{in}} = \frac{1}{c^2}.$$

Из (3.26) и неравенства Коши-Буняковского следует

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{\sqrt{n}V_n} &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{|\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k\mathbb{E}Z_i|}{(n\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}\mathbb{E}c_k^2Z_i^2)^{1/2}}\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k^2|\mathbb{E}Z_i|^2)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}\mathbb{E}c_k^2Z_i^2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Так как $Z_1,\dots,Z_l$ - невырожденные случайные величины, то $|\mathbb{E}Z_i|^2 < \mathbb{E}Z_i^2$ для всех $i = 1,\dots,l$. Обозначим $\alpha_i = \mathbb{E}|Z_i|^2/\mathbb{E}Z_i^2$ и $\alpha = \max\{\alpha_,\dots,\alpha_l\}$. Из того, что $|\mathbb{E}Z_i|^2 \le \alpha\mathbb{E}Z_i^2$ для всех $i = 1,\dots,l$, следует

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k^2|\mathbb{E}Z_i|^2 \le \alpha\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k^2\mathbb{E}Z_i^2,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{\sqrt{n}V_n} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} c_k^2|\mathbb{E}Z_i|^2)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}}\mathbb{E}c_k^2Z_i^2)^{1/2}} \le \sqrt{\alpha} < 1.$$

Таким образом, мы можем положить $A = \sqrt{\alpha}$ в (3.21). Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Для любой последовательности $\{\gamma_n\}_{n\ge1}$ действительных чисел следующие три утверждения эквивалентны*

$$\text{последовательность } \left\{\frac{S_n-\gamma_n}{V_n}\right\}_{n\ge1} \text{ слабо компактна,} \tag{3.27}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|\gamma_n-\mathbb{E}T_n(\lambda)|}{a_n(\lambda)} < \infty \text{ для всех } \lambda > 0, \tag{3.28}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|\gamma_n-\mathbb{E}T_n(\lambda)|}{a_n(\lambda)} < \infty \text{ для всех } 0 < \lambda < 1/2. \tag{3.29}$$

Доказательство. Предположим, что (3.15) или (3.27) выполняется. Фиксируем число $\lambda > 0$. Так как

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{L^2\lambda} = 0, \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{m_{i,n}}\right)^{m_{i,n}} = e^{-1/\lambda}$$

Мы можем выбрать $L > 0$ и $n' \ge n_0$ таким образом, что утверждение (3.8) имеет место. Вспомним, что $S_n = T_n(\lambda) + R_n(\lambda)$. Для всех $n \geq n_0$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\{|T_n(\lambda\} - \gamma_n| > 2l^2L^2(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&= \{|T_n(\lambda\} - \gamma_n| > 2l^2L^2(d \vee 1)a_n(\lambda), V_n \leq lL(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&\cup \{|T_n(\lambda\} - \gamma_n| > 2l^2L^2(d \vee 1)a_n(\lambda), V_n > lL(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&\subseteq \{|T_n(\lambda\} - \gamma_n| > 2lLV_n\} \cup \{V_n > La_n(\lambda)\} \\
&\subseteq \{|S_n(\lambda\} - \gamma_n| > lLV_n\} \cup \{|R_n(\lambda)| > lLV_n\} \cup \{V_n > lL(d \vee 1)a_n(\lambda)\}.
\end{aligned}
$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \gamma_n| > 2l^2L^2(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&\leq \mathbb{P}\{|S_n(\lambda) - \gamma_n| > lLV_n\} + \mathbb{P}\{|R_n(\lambda)| > lLV_n\} + \mathbb{P}\{V_n > lL(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&\leq \frac{1}{\lambda L^2} + 1 - \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{L^2\lambda} + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda m_{i,n}}\right)^{m_{i,n}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\limsup_{L\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \gamma_n| &> 2l^2L^2(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&\leq 1 - (1 - e^{-1/\lambda})^l < 1.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

С другой стороны мы имеем $|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| \leq |T_n(\lambda) - \gamma_n| + |T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)|$ и

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2(2l^2L^2(d \vee 1) + lL(c \wedge 1))a_n(\lambda)\} \\
&\leq \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \gamma_n| > 2l^2L^2(d \vee 1)a_n(\lambda)\} \\
&+ \mathbb{P}\{|T_n(\lambda) - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > lL(c \wedge 1)a_n(\lambda)\}.
\end{aligned}
$$

Из (3.11) и (3.18) следует, что существует $n_0 = n(\lambda) \in \mathbb{N}$ и $L_0 > 0$ такие, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2(2l^2L_0^2(d \vee 1) + lL(c \wedge 1))a_n(\lambda)\} \\
&\leq \frac{1}{L_0^2(c^2 \wedge 1)\lambda} + \frac{1}{\lambda L_0^2} + 1 - \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1}{L_0^2\lambda} + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda m_{i,n}}\right)^{m_{i,n}}\right)\right) \\
&< 1 - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1/\lambda}\right)^l < 1
\end{aligned}
$$

для $n > n_0$. Вероятность слева равна 0, таким образом утверждение (3.28) имеет место, так как

$$|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| \le 2(2l^2L_0^2(d \vee 1) + lL_0(c \wedge 1))a_n(\lambda)\} \text{ для всех } n > n_0.$$

Очевидно, что (3.28) влечет (3.29). Предположим, что (3.29) выполнено. Для любых $\lambda \in (0,1)$ обозначим

$$c(\lambda) = \sup_{n \ge 1, m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i=1,\dots,l} \frac{|\gamma_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)|}{a_n(\lambda)}.$$

Отметим, что $c(\lambda) < \infty$ по (3.17). Для всех $L > 0$ и $m_{i,n} > 1/(\lambda Q_i(0)), i = 1,\dots,l$, имеем

$$\begin{aligned}
\{|S_n - \gamma_n| > 3LV_n\} &= \{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| + |\mathbb{E}T_n(\lambda) - \gamma_n| > 3LV_n\} \\
&\subseteq \{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 3LV_n - c(\lambda), LV_n > c(\lambda)a_n(\lambda)\} \\
&\cup \{|S_n - \gamma_n| > 3LV_n, LV_n \le c(\lambda)a_n(\lambda)\} \\
&\subseteq \{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2LV_n\} \cup \{LV_n \le c(\lambda)a_n(\lambda)\}.
\end{aligned}$$

Обозначим $\delta = c(\lambda)/(L(c \wedge 1))$ и подберем такое число $L > 0$, что $\delta < 1/\sqrt{\lambda}$. По (3.5) и (3.12) получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\{|S_n - \gamma_n| > 3LV_n\} \le \mathbb{P}\{|S_n - \mathbb{E}T_n(\lambda)| > 2LV_n\} + \mathbb{P}\{LV_n \le c(\lambda)a_n(\lambda)\}\} \\
&\le \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{L^2(c^2 \wedge 1)\delta^2} + \frac{1}{L^2}\right) + 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{1+\lambda} + 1 - \frac{(1-\lambda\delta^2)^2}{1+\lambda}.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\limsup_{L\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|S_n - \gamma_n| > 3LV_n\} \le \frac{2\lambda}{1+\lambda}.$$

Утверждение (3.27) непосредственно следует из того, что мы можем положить $\lambda = 0$. Теорема доказана.

§ 4

Асимптотическая нормальность самонормированных сумм независимых случайных величин

4.1 Постановка задачи

Поиск условий для слабой сходимости самонормированных сумм является одной из центральных задач. К настоящему времени известны немногие отдельные результаты такого характера. В частности, в статье [18] были установлены необходимые и достаточные условия для слабой сходимости самонормированных сумм к стандартной нормальной случайной величине. В данном параграфе будет обобщен результат из статьи [18] на случай независимых однотипных случайных величин.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $Y_n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть даны положительные числа $a_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $0 < c = \inf_{n\geq 1} c_n < \sup_{n\geq 1} c_n = d < \infty$. Построим последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ случайных величин $X_n = c_n Y_n$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n,\ T_n = Y_1 + \dots + Y_n,\ V_n^2 =$

$X_1^2 + \cdots + X_n^2$, $W_n^2 = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$ Мы будем иметь дело с самонормированными суммами S_n/V_n. Условимся считать, что отношение $S_n/V_n = 0$, если $X_1 + \cdots + X_n = 0$.

4.2 Доказательства утверждений

Теорема 4.1. *Для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{S_n}{V_n} < x\Big\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{4.1}$$

достаточно, чтобы функция распределения $F(x) = \mathbb{P}\{Y_1 < x\}, x \in \mathbb{R}$, принадлежала области притяжения нормального распределения Φ и $\mathbb{E}Y_1 = 0$. Это условие является необходимым, если F – симметричная функция распределения.

Доказательство. Предположим, что функция распределения F принадлежит области притяжения нормального распределения Φ и $\mathbb{E}Y_1 = 0$. Ниже мы докажем два утверждения: существуют положительные числа $B_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{S_n}{B_n} < x\Big\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n^2}{B_n^2} = 1 \text{ по вероятности }. \tag{4.3}$$

Из этих утверждений, в силу известной теоремы (см. [21], стр. 281), следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{S_n}{V_n} < x\Big\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{S_n}{B_n}\frac{B_n}{V_n} < x\Big\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}.$$

Докажем утверждение (4.2). Обозначим $F_n(x) = \mathbb{P}\{X_n < x\}$ функцию распределения случайной величины X_n. Если $\mathbb{E}Y_1^2 < \infty$, то можно положить $B_n^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \mathbb{E}Y_1^2$. Действительно, в этом случае применима центральная предельная теорема, так как выполнено условие Линдеберга:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \int_{|x|>\varepsilon B_n/|c_k|} x^2 dF(x)$$
$$\le \frac{d^2}{c^2 n} n \int_{|x|>\varepsilon B_n/d} x^2 dF(x) = \frac{d^2}{c^2}\int_{|x|>\varepsilon B_n/d} x^2 dF(x) \to 0,\ n\to\infty,\ \varepsilon>0.$$

Далее предполагается, что $\mathbb{E}Y_1^2=\infty$. Так как функция распределения F принадлежит области притяжения нормальной функции распределения Φ, то

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{D_n} - A_n < x\Big\} = \Phi(x), x\in\mathbb{R},$$

при некотором выборе вещественных чисел A_n и $D_n>0, n\in\mathbb{N}$. По известной теореме (см. [22], стр. 36) можно положить $D_n = n^{1/2}h(n)$, где $h(x), x\in(0,\infty)$, – некоторая положительная функция, медленно меняющаяся в смысле Карамата. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} D_n=\infty$. По известной теореме (см. [19], стр. 136) выполняются условия, для любого $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\{|Y_1|>\varepsilon D_n\} = 0, \tag{4.4}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{D_n^2}\Big(\int_{|x|\le\varepsilon D_n} x^2 dF(x) - \Big(\int_{|x|\le\varepsilon D_n} x dF(x)\Big)^2\Big) = 1. \tag{4.5}$$

Можно выбрать последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1}$ положительных чисел со следующими свойствами: $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n D_n=\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\varepsilon_n^2 D_n^2}\Big(\int_{|x|\le\varepsilon_n D_n} x^2 dF(x) - \Big(\int_{|x|\le\varepsilon_n D_n} x dF(x)\Big)^2\Big) = \infty. \tag{4.6}$$

Обозначим $C_n=\varepsilon_n D_n$ и докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{|X_k|>C_n\} = 0, \tag{4.7}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\le C_n} x^2 dF_k(x) - \Big(\int_{|x|\le C_n} x dF_k(x)\Big)^2\Big) = \infty. \tag{4.8}$$

Условие (4.7) является следствием неравенства $\mathbb{P}\{|X_k|>C_n\}\le P\{|Y_1|>\varepsilon D_n/c\}$ и условия (4.4). Далее, в силу известной теоремы (см. стр. [19], 192) принадлежность функции распределения F области притяжения нормального распределения Φ влечет конечность абсолютного момента $\mathbb{E}|Y_1|^\alpha$ для любого $\alpha \in (0,2)$. Заметим, что

$$\Big|\int_{|x|<C_n} xdF_k(x)\Big| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x|dF_k(x) = \mathbb{E}|X_k| \le c\mathbb{E}|Y_1|.$$

Так как $\mathbb{E}Y_1^2 = \infty$, то $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{|x|<\lambda} x^2dF(x) = \infty$. В силу этого мы получим

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\le C_n} xdF_k(x)\Big)^2\Big/\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le C_n} x^2dF_k(x)$$
$$\le d^2n\Big/\sum_{k=1}^{n}c_k^2\int_{|x|\le C_n/d} x^2dF(x) \le d^2\Big/\Big(c^2\int_{|x|\le C_n/d} x^2dF(x)\Big) \to 0 \quad (4.9)$$

при $n\to\infty$. Поэтому условие (4.8) эквивалентно следующему условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le C_n} x^2dF_k(x) = \infty.$$

Обозначим $\mathbb{1}_A$ индикаторную функцию множества A. Из неравенства $\mathbb{E}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le C_n\}}) \ge c^2E(Y_1^2\mathbb{1}_{\{|Y_1|\le C_n/d\}})$ и из условия (4.6) следует, что

$$\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le C_n} x^2dF_k(x) = \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le C_n\}})$$
$$\ge \frac{c^2n}{C_n^2}\int_{|x|<C_n/d} x^2dF(x) \to \infty.$$

при $n\to\infty$. Условие (4.8) доказано.
Обозначим

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\le C_n} x^2dF_k(x) - \Big(\int_{|x|\le C_n} xdF_k(x)\Big)^2\Big).$$

Из условия (4.8) следует, что $\lim_{n\to\infty} C_n/B_n = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $C_n < \varepsilon B_n$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Для таких n выполняется неравенство $\mathbb{P}\{|X_k| > \varepsilon B_n\} \le \mathbb{P}\{|X_n| > C_n\}$. Отсюда и из (4.7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{|X_k|>\varepsilon B_n\}=0. \tag{4.10}$$

С помощью известных рассуждений (см. [19], стр. 140-141) можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|\le\varepsilon B_n}x^2dF_k(x)-\Big(\int_{|x|\le\varepsilon B_n}xdF_k(x)\Big)^2\Big)=1,\ \varepsilon>0. \tag{4.11}$$

Утверждение (4.9) останется справедливым, если C_n заменить на εB_n. Поэтому (4.10) эквивалентно следующему условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\le\varepsilon B_n}x^2dF_k(x)=1,\varepsilon>0. \tag{4.12}$$

По уже упоминавшейся теореме (см. [19], стр. 136) условия (4.10) и (4.11) достаточны для существования вещественных чисел $A_n, n\in\mathbb{N}$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\frac{S_n}{B_n}-A_n<x\Big\}=\Phi(x),x\in\mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Числа $A_n, n\in\mathbb{N}$, можно выбрать (см. [19], стр. 132) по следующему правилу

$$A_n=\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<B_n}xdF_k(x).$$

Докажем, что $\lim_{n\to\infty}A_n=0$. Так как $\mathbb{E}X_k=a_k\mathbb{E}Y_1=0$, то

$$\int_{|x|<B_n}xdF_k(x)=-\int_{|x|\ge B_n}xdF_k(x).$$

Используя интегрирование по частям, мы получим следующую оценку для

$|A_n|$:

$$|A_n| = \Big|\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<B_n} x dF_k(x)\Big|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}(1-F_k(B_n)+F_k(-B_n)) + \frac{n}{B_n}\int_{B_n}^{\infty}(1-F(x/d)+F(-x/d))dx.$$

По известным теоремам (см. [22], стр. 97, стр. 501) справедливо представление:

$$1-F(x)+F(-x) = \frac{c(x)\exp\Big\{\int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt\Big\}}{x^2}, x \in (0,\infty),$$

где α – положительное число, функции $c(x)$ и $\varepsilon(x),\ x \in (0,\infty)$, удовлетворяют условиям $\lim_{x\to\infty} c(x) = c_\infty > 0$ и $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x) = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{z(x)}{2} \leq c(x)\exp\Big\{\int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt\Big\} \leq 2z(x), z(x) = c_\infty \exp\Big\{\int_\alpha^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt\Big\}$$

для любого $x \geq x_0$, больше или равного некоторого числа $x_0 > 0$. Поэтому найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ будет выполняться неравенство

$$|A_n| \leq \sum_{k=1}^{n}(1-F_k(B_n)+F_k(-B_n)) + \frac{n}{B_n}\int_{B_n}^{\infty}\frac{z(x)}{x^2}dx. \tag{4.14}$$

С помощью правила Лопиталя мы получим

$$\lim_{y\to\infty}\int_y^\infty \frac{z(x)}{x^2}dx\Big/(z(x)/x) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{1-\varepsilon(y)} = 1.$$

Отсюда следует существование числа $y_0 > B_{n_0}$ такого, что для всех $y \geq y_0$ выполняется неравенство

$$\int_y^\infty \frac{z(x)}{x^2}dx \leq \frac{2z(y)}{y} \leq 4y\frac{h(y)}{y^2} = 4y(1-F(y)+F(-y)).$$

Отсюда и из (4.14) следует, что

$$|A_n| \leq \sum_{k=1}^{n}(1-F_k(B_n)+F_k(-B_n)) + 4\sum_{k=1}^{n}(1-F_k(aB_n)+F_k(-aB_n)).$$

Здесь мы воспользовались соотношениями $1 - F(B_n) + F(-B_n) = P\{|Y_1| \geq B_n\} = P\{|X_k| \geq c_k B_n\} \leq P\{|X_k| \geq cB_n\}$. Выше отмечалось, что $\lim_{n\to\infty} C_n/B_n = 0$. Поэтому выполняется неравенство $(1+c)C_n < B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого n_0'. Если $n > n_0'$, то $\mathbb{P}\{|X_k| \geq B_n\} \leq \mathbb{P}\{|X_k| > C_n\}$ и $\mathbb{P}\{|X_k| \geq aB_n\} \leq \mathbb{P}\{|X_k| > C_n\}$. Отсюда и из (4.7) следует требуемое утверждение

$$\lim_{n\to\infty} |A_n| \leq 5 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{|X_k| > C_n\} = 0.$$

Утверждение (4.13) и условие $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ влекут (4.2).

Докажем утверждение (4.3). Если $\mathbb{E}Y_1^2 < \infty$, то утверждение (4.3) выполняется по теореме Райкова (см. [19], стр. 152). Далее предполагается, что $\mathbb{E}Y_1^2 = \infty$. Для любых положительных чисел ε и δ мы имеем, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta\Big\} \leq \mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\leq k\leq n} |X_k| > \varepsilon B_n\Big\} \\ + \mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\leq k\leq n} |X_k| \leq \varepsilon B_n\Big\}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Первое слагаемое справа в силу условия (4.10) стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2} - 1\Big| > \delta, \max_{1\leq k\leq n} |X_k| > \varepsilon B_n\Big\} \leq \mathbb{P}\{\max_{1\leq k\leq n} |X_k| > \varepsilon B_n\} \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{|X_k| > \varepsilon B_n\}.$$

Оценим второе слагаемое в (4.15). Заметим, что $\mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq \varepsilon B_n\}}) = \int_{|x|\leq \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x)$. В силу (4.12) выполняется неравенство

$$\Big|\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|\leq\varepsilon B_n\}}) - 1\Big| < \delta/2$$

для всех n, начиная с некоторого n_0. Для $n \ge n_0$ справедливо:

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2}-1\Big|>\delta, \max_{1\le k\le n}|X_k|\le \varepsilon B_n\Big\}$$
$$\le \mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}-\mathbb{E}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}))\Big|>\frac{\delta}{2}\Big\}.$$

Правую часть можно оценить помощью неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}-\mathbb{E}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}}))\Big|>\frac{\delta}{2}\Big\}$$
$$\le \frac{4\varepsilon^2}{\delta^2B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2\mathbb{1}_{\{|X_k|\le\varepsilon B_n\}})\le\frac{4\varepsilon^2}{\delta^2}(1+\frac{\delta}{2}).$$

В результате мы получили следующую оценку вероятности слева в (4.15):

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2}-1\Big|>\delta\Big\}\le\frac{4\varepsilon^2}{\delta^2}\Big(1+\frac{\delta}{2}\Big).$$

Так как число $\varepsilon>0$ можно выбрать произвольно малым то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{V_n^2}{B_n^2}-1\Big|>\delta\Big\}=0.$$

Тем самым утверждение (4.3) доказано.

Докажем необходимость условия при предположении, что случайные величины $Y_n, n\in\mathbb{N}$, симметричны.

Так как последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\ge1}$ слабо сходится, то она слабо компактна. Докажем это.

Пусть Z - стандартно нормально распределенная случайная величина, тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $x>0$, такой, что $\mathbb{P}(|Z|<x)<\varepsilon$. Из слабой сходимости последовательности $\{S_n/V_n\}_{n\ge1}$ следует, что $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|S_n/V_n|<x)=\mathbb{P}(|Z|<x)$. Значит, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|S_n/V_n|<x)<\varepsilon$, т.е. существует $n_0\in\mathbb{N}$, такое, что для любых $n\ge n_0$ $\sup_{n\ge n_0}\mathbb{P}(|S_n/V_n|>x)<\varepsilon$. При $n<n_0$ $\lim_{x\to\infty}\mathbb{P}(|S_n/V_n|>x)=0$ по определению функции распределения. Таким образом $\lim_{x\to\infty}\sup_{n\ge n_0}\mathbb{P}(|S_n/V_n|>x)<2\varepsilon$. Так как ε может быть произвольным, то последовательность $\{S_n/V_n\}_{n\ge1}$ слабо компактна.

По лемме 2.4 мы имеем, что

$$\sup_{n\ge 1}\mathbb{E}\exp\left\{c_0\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2\right\}\le 2. \tag{4.16}$$

для некоторого числа $c_0>0$. Из (4.16) и разложения Тейлора

$$\mathbb{E}\exp\left\{c_0\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^2\right\}=\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\frac{(c_0(S_n/V_n)^2)^k}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_0^k}{k!}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{V_n}\right)^{2k}$$

следует, что $\mathbb{E}(S_n/V_n)^6<\infty$. Отсюда и из сходимости распределений самонормированных сумм (S_n/V_n) к нормальному закону следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^4=\int_{-\infty}^{\infty}x^4d\Phi(x)=3. \tag{4.17}$$

Математическое ожидание под знаком предела можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{V_n}\Big)^4&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big)+6\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_i^2X_j^2}{V_n^4}\Big)+8\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_iX_j^3}{V_n^4}\Big)\\&+36\sum_{1\le i<j<r\le n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_iX_jX_r^2}{V_n^4}\Big)+24\sum_{1\le i<j<r<k\le n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_iX_jX_rX_k}{V_n^4}\Big).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Ниже будет доказано, что последние три суммы равны нулю. Поэтому (4.18) равносильно следующему утверждению

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big)+6\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_i^2X_j^2}{V_n^4}\Big)\Big)=3.$$

Отметим, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k^2}{V_n^2}\right)^2=1=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\frac{X_k^4}{V_n^4}\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\frac{X_i^2X_j^2}{V_n^4},$$

$$2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\frac{X_i^2X_j^2}{V_n^4}=1-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\frac{X_k^4}{V_n^4}\right).$$

Таким образом
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big)=0.$$
Обозначим $W_n^2=Y_1^2+\cdots+Y_n^2$. Привлекая неравенство
$$\frac{X_k^4}{V_n^4}=\frac{X_k^4}{W_n^4}\frac{W_n^4}{V_n^4}\geq\frac{c^4}{d^4}\frac{Y_k^4}{W_n^4},k=1,\ldots,n,$$
мы получим
$$\mathbb{E}\Big(\frac{\max_{1\leq k\leq n}Y_k^4}{W_n^4}\Big)\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\frac{Y_k^4}{W_n^4}\Big)\leq\frac{d^4}{c^4}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\frac{X_k^4}{V_n^4}\Big)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$
Известно (см. [23]), что условие
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big(\frac{\max_{1\leq k\leq n}|Y_k|}{W_n}\Big)=0$$
является необходимым и достаточным для принадлежности функции распределения $F(x)=P\{Y_1<x\},x\in\mathbb{R}$, области притяжения нормальной функции распределения Φ.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нужно доказать, что последние три суммы в (4.18) равны нулю. Воспользуемся равенством
$$\int\limits_0^\infty\lambda e^{-\lambda a^2}d\lambda=\frac{1}{a^4}$$
для любого $a>0$. Положив $a=V_n$ получим
$$\mathbb{E}\frac{X_iX_j^3}{V_n^4}=\mathbb{E}\int\limits_0^\infty X_iX_j^3\lambda e^{-\lambda V_n^2}d\lambda.$$
По теореме Фубини операции интегрирования и математического ожидания

можно поменять местами. В результате получим

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\frac{X_i X_j^3}{V_n^2} &= \int_0^\infty \lambda \mathbb{E}(X_i X_j^3 e^{-\lambda V_n^2}) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda \mathbb{E}(X_i e^{-\lambda X_i^2}) \mathbb{E}(X_j^3 e^{-\lambda (V_n^2 - X_i^4)}) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Равенство $\mathbb{E}(X_i X_j^3 e^{-\lambda V_n^2}) = \mathbb{E}(X_i e^{-\lambda X_i^2}) \mathbb{E}(X_j^3 e^{-\lambda (V_n^2 - X_i^4)})$ выполняется в силу независимости случайных величин $X_i e^{-\lambda X_i^2}$ и $X_j^3 e^{-\lambda (V_n^2 - X_i^4)}$. Нетрудно видеть, что случайные величины $X_i e^{-\lambda X_i^2}$ симметричны, так как X_i - симметричная случайная величина. Поэтому $\mathbb{E}(X_i e^{-\lambda X_i^2}) = 0$ и, следовательно, $\mathbb{E}((X_i X_j^3)/V_n^4) = 0$. Аналогичные рассуждения применимы и для остальных сумм

$$
\mathbb{E}\frac{X_i X_j X_r^2}{V_n^4} = \mathbb{E} \int_0^\infty X_i X_j X_r^2 \lambda e^{-\lambda V_n^2} d\lambda
$$

$$
= \int_0^\infty \mathbb{E}(X_i e^{-\lambda X_i^2}) \mathbb{E}(X_j X_r^2 e^{-\lambda (V_n^2 - X_i^2)}) d\lambda = 0,
$$

$$
\mathbb{E}\frac{X_i X_j X_r X_k}{V_n^4} = \mathbb{E} \int_0^\infty X_i X_j X_r X_k \lambda e^{-\lambda V_n^2} d\lambda
$$

$$
= \int_0^\infty \mathbb{E}(X_i e^{-\lambda X_i^2}) \mathbb{E}(X_j X_r X_k e^{-\lambda (V_n^2 - X_i^2)}) d\lambda = 0.
$$

Теорема доказана.

§ 5

Закон повторного логарифма для самонормированных сумм независимых случайных величин

5.1 Постановка задачи

Закон повторного логарифма является одним из фундаментальных законов теории вероятностей. С различными вариантами закона можно ознакомиться по обзорной статье [24], а также по статьям [6] и [8] и по источникам, упомянутых в них. В данной части диссертации доказаны два варианта закона повторного логарифма для самонормированных случайных величин. Первый из них представляет собой равномерный закон повторного логарифма для самонормированных сумм, построенных по одинаково распределенным независимым случайным величинам. Этот вариант закона повторного логарифма является новым и не имеет аналогов даже среди классических законов повторного логарифма для сумм независимых случайных величин. Второй вариант закона повторного логарифма является обобщением теоремы $Giné - Mason$ ([6]) на самонормированные суммы, построенные по многотипным независимым случайным величинам.

Пусть независимые случайные величины $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Предположим, что каждая из случайных величин $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, распределена по одному из конечного числа различных невырожденных распределений. Удобно считать, что существуют невырожденные случайные величины $Z_1, \ldots, Z_l$, и каждая из случайных величин $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены с одной из случайных величин $Z_1, \ldots, Z_l$. Введем обозначения по аналогии с тем, как это было сделано в параграфе 3. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ разбиваются на l непересекающихся множеств $\mathcal{M}_{1,n}, \ldots, \mathcal{M}_{l,n}$. Случайная величина X_k принадлежат множеству $\mathcal{M}_{i,n}$, тогда и только тогда, когда случайные величины X_k и Z_i имеют одинаковое распределение. Набор индексов $\{1, \ldots, n\}$ разбивается на l непересекающихся множеств $\mathcal{L}_{1,n}, \ldots, \mathcal{L}_{l,n}$. Индекс k принадлежит множеству $\mathcal{L}_{i,n}$ тогда и только тогда, когда $X_k \in \mathcal{M}_{i,n}$. Обозначим через $m_{i,n}$ число индексов в множестве $\mathcal{L}_{i,n}$. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{i,n}}{n} = p_i,\ 0 < p_i < 1,\ \text{для всех } i = 1, \ldots, l. \tag{5.1}$$

Предположим также, что независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$ определены на упомянутом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Обозначим $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, W_n = \sum_{k=1}^n \xi_k^2$ и сигма-алгебру $\mathcal{F}_k = \sigma(T_n, W_n^2\ n \geq k)$, порожденную случайными величинами $T_n, W_n^2, n \geq k$.

Теорема 5.1. *1. Если последовательность $\{T_n/W_n\}_{n\geq 1}$ слабо компактна, то*

$$\limsup_{n\to\infty} (2\log\log n)^{-1/2} \max_{\lambda(n)\leq k\leq n} \frac{|T_k|}{W_k} < \infty \text{ п.в.} \tag{5.2}$$

2. Если случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, симметричны, то

$$\limsup_{n\to\infty} (2\log\log n)^{-1/2} \max_{\lambda(n)\leq k\leq n} \frac{|T_k|}{W_k} \leq 1 \text{ п.в.}, \tag{5.3}$$

где функция $\lambda(n) = 1$ для $n = 1, \ldots, 9$ и $\lambda(n) = [n - n/\ln\ln n]$ для $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Квадратные скобки означают целую часть заключенного в них *числа.*

Для формулировки следующей теоремы нам понадобятся новые обозначения

$$S_{i,n} = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k,$$
$$V_{i,n}^2 = \sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k^2, i-1,\dots,l.$$

Напомним, что $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k,\ V_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$.

Теорема 5.2. *1. Если последовательности $\{S_{i,n}/V_{i,n}\}_{n\geq 1}$, $i = 1,\dots,l$, слабо компактны, то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{V_n\sqrt{\log\log n}} < \infty \text{ п.в.} \tag{5.4}$$

2. Если случайные величины Z_i, $\forall i = 1,\dots,l$ симметричные, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{V_n\sqrt{2\log\log n}} \leq 1 \text{ п.в.} \tag{5.5}$$

Утверждения (5.4) и (5.5) представляют собой обобщения известных теорем ([6], Теорема 1 и Теорема 2 соответственно) для независимых одинаково распределенных случайных величин на случай многотипных случайных величин. Подчеркнем, что утверждение (5.5) для симметричных случайных величин выполняется без предположения о слабой компактности последовательности самонормированных сумм.

5.2 Вспомогательные леммы

Для доказательства теорем 5.1 и 5.2 нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, которые мы сформулируем в нескольких леммах.

Определение 5.1. *Класс $\mathcal{E}$ множеств из $\mathcal{F}$ называется π-классом, если $A\bigcap B \in \mathcal{E}$ для любых $A,\ B \in \mathcal{E}$.Класс $\mathcal{D}$ множеств из $\mathcal{F}$ называется λ-классом, если*

1. $\Omega \in \mathcal{D}$*;*

2. $A \setminus B \in \mathcal{D},\ \forall A,\ B \in \mathcal{D},\ B \subseteq A$*;*

3. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D},\ \forall A_n \in \mathcal{D},\ A_n \uparrow (A_n \subseteq A_{n+1})$*.*

Следующая лемма принадлежит В. Серпинскому. Доказательство можно найти например в [25] (стр. 13) или в [26].

Лемма 5.1 (Серпинский В.)**.** *Пусть даны* π*-класс* $\mathcal{E}$ *и* λ*-класс* $\mathcal{D}$*. Если* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$*, то сигма-алгебра* $\sigma(\mathcal{E})$*, порожденная* π*-классом* $\mathcal{E}$*, является подмножеством* λ*-класса* $\mathcal{D}$*.*

Лемма 5.2. *Если случайные величины* $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ *независимы, одинаково распределены и имеют конечный второй момент, то для любых* $k, m \in \mathbb{N},\ m \le k+1$ *справедливы равенства*

$$\mathbb{E}(T_m|\mathcal{F}_{k+1}) = \frac{m}{k+1} T_{k+1} \text{ п.в.} \tag{5.6}$$

$$\mathbb{E}(W_m^2|\mathcal{F}_{k+1}) = \frac{m}{k+1} W_{k+1}^2 \text{ п.в.} \tag{5.7}$$

Доказательство. По определению условного математического ожидания (далее УМО) почти всюду выполняется

$$T_{k+1} = \mathbb{E}(T_{k+1}|\mathcal{F}_{k+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i | \mathcal{F}_{k+1}\right) \text{ п.в.},$$

$$W_{k+1}^2 = \mathbb{E}(W_{k+1}^2|\mathcal{F}_{k+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i^2 | \mathcal{F}_{k+1}\right) \text{ п.в.}$$

Предположим, что для любых $i \neq j \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\mathbb{E}(\xi_i|\mathcal{F}_{k+1}) = \mathbb{E}(\xi_j|\mathcal{F}_{k+1}) \text{ п.в.}, \tag{5.8}$$

$$\mathbb{E}(\xi_i^2|\mathcal{F}_{k+1}) = \mathbb{E}(\xi_j^2|\mathcal{F}_{k+1}) \text{ п.в.} \tag{5.9}$$

тогда, в силу свойства линейности УМО,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i|\mathcal{F}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k+1}\mathbb{E}(\xi_i|\mathcal{F}_{k+1}) = (k+1)\mathbb{E}(\xi_1|\mathcal{F}_{k+1}) \text{ п.в.,}$$
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i^2|\mathcal{F}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k+1}\mathbb{E}(\xi_i^2|\mathcal{F}_{k+1}) = (k+1)\mathbb{E}(\xi_1^2|\mathcal{F}_{k+1}) \text{ п.в.}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}(\xi_1|\mathcal{F}_{k+1}) = \frac{1}{k+1}T_{k+1} \text{ п.в.,} \tag{5.10}$$
$$\mathbb{E}(\xi_1^2|\mathcal{F}_{k+1}) = \frac{1}{k+1}W_{k+1}^2 \text{ п.в.} \tag{5.11}$$

Используя (5.8) и (5.10) получим для любого $m \leq k+1$

$$\mathbb{E}(T_m|\mathcal{F}_{k+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\xi_i|\mathcal{F}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{m}\xi_{\mathbb{i}}|\mathcal{F}_{\mathbb{k}+\mathbb{1}} = m\mathbb{E}(\xi_1|\mathcal{F}_{k+1}) \text{ п.в.}$$
$$\mathbb{E}(T_m|\mathcal{F}_{k+1}) = \frac{m}{k+1}T_{k+1} \text{ п.в.}$$

Используя (5.9) и (5.11) получим для любого $m \leq k+1$

$$\mathbb{E}(W_m^2|\mathcal{F}_{k+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\xi_i^2|\mathcal{F}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}(\xi_i^2|\mathcal{F}_{k+1}) = m\mathbb{E}(\xi_1^2|\mathcal{F}_{k+1}) \text{ п.в.}$$
$$\mathbb{E}(W_m^2|\mathcal{F}_{k+1}) = \frac{m}{k+1}W_{k+1}^2 \text{ п.в.}$$

Таким образом, чтобы доказать (5.6) и (5.7) требуется показать, что выполняются равенства (5.8) и (5.9), т.е.

$$\int_B \xi_i d\mathbb{P} = \int_B \xi_j d\mathbb{P}, \tag{5.12}$$
$$\int_B \xi_i^2 d\mathbb{P} = \int_B \xi_j^2 d\mathbb{P} \tag{5.13}$$

для любых $B \in \mathcal{F}_{k+1}$.

Обозначим $\mathcal{Z}$ класс множеств $B \in \mathcal{F}_{k+1}$, для которых равенства (5.12) и

(5.13) имеют место. Докажем, что $\mathcal{Z}$ является λ - классом.

Проверим, что выполнены все условия из определения λ-класса (определение 5.1). Множество Ω принадлежит $\mathcal{Z}$. Действительно, так как случайные величины $\xi_i, i \in \mathbb{N}$, одинаково распределены, то

$$\int\limits_{\Omega} \xi_i d\mathbb{P} = \mathbb{E}\xi_i = \mathbb{E}\xi_j d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \xi_j d\mathbb{P},$$
$$\int\limits_{\Omega} \xi_i^2 d\mathbb{P} = \mathbb{E}\xi_i^2 = \mathbb{E}\xi_j^2 d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \xi_j^2 d\mathbb{P}.$$

Пусть $A, B \in \mathcal{Z}$ и $A \subset B$. В силу свойства линейности интеграла выполняются равенства

$$\int\limits_{B\setminus A} \xi_i d\mathbb{P} = \int\limits_{B} \xi_i d\mathbb{P} - \int\limits_{A} \xi_i d\mathbb{P} = \int\limits_{B} \xi_j d\mathbb{P} - \int\limits_{A} \xi_j d\mathbb{P} = \int\limits_{B\setminus A} \xi_j d\mathbb{P},$$
$$\int\limits_{B\setminus A} \xi_i^2 d\mathbb{P} = \int\limits_{B} \xi_i^2 d\mathbb{P} - \int\limits_{A} \xi_i^2 d\mathbb{P} = \int\limits_{B} \xi_j^2 d\mathbb{P} - \int\limits_{A} \xi_j^2 d\mathbb{P} = \int\limits_{B\setminus A} \xi_j^2 d\mathbb{P}.$$

Пусть $B_n \in \mathcal{Z}, n \in \mathbb{N},\ B_n \subseteq B_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $B = \cup_n B_n \in \mathcal{Z}$. По теореме об ограниченной сходимости мы получим

$$\int\limits_{B} \xi_i d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \xi_i \mathbb{1}_B d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \xi_i \mathbb{1}_{B_n} d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \xi_j \mathbb{1}_{B_n} d\mathbb{P} = \int\limits_{B} \xi_j d\mathbb{P}$$

и

$$\int\limits_{B} \xi_i^2 d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \xi_i^2 \mathbb{1}_B d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \xi_i^2 \mathbb{1}_{B_n} d\mathbb{P} = \int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \xi_j^2 \mathbb{1}_{B_n} d\mathbb{P} = \int\limits_{B} \xi_j^2 d\mathbb{P}.$$

Доказательство того, что $\mathcal{Z}$ является λ-классом завершено.

Обозначим $\mathcal{L}$ - класс множеств вида $B = \{T_{k_1} < c_1, T_{k_2} < c_2, \ldots, T_{k_r} < c_r, V_{l_1}^2 < b_1, \ldots, V_{l_s}^2 < b_s\}$, где $k+1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ и $k+1 \le l_1 < l_2 < \cdots < l_s$, $\forall r, s, k_1, \ldots k_r, l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_r, \in \mathbb{R}, b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{R}^+$.

Убедимся, что $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{Z}$. Условимся обозначать x_n возможные значения случайной величины ξ_n. Обозначим $t = k_r \vee l_s$ и $P_{1,\ldots,t}(A) = P((\xi_1, \ldots, \xi_t) \in A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ - совместное распределение случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_t$. Напомним, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ обозначает борелевскую сигма-алгебру t-мерного евклидова пространства. Предположим, что $1 \le 1 \le j \le n$. Обозначим преобразование $y_1 = x_1, \ldots, y_{i-1} = x_{i-1}, y_i = x_j, y_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, y_{j-1} = x_{i-1}, y_j = x_i, y_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, y_t = x_t$. По теореме о замене меры интегрирования мы получим

$$\int\limits_B \xi_i d\mathbb{P} = \int\limits_{\substack{\sum_{d=1}^{k_1} x_d < c_1, \\ \ldots \\ \sum_{d=1}^{k_r} x_d < c_r; \\ \sum_{d=1}^{l_1} x_d^2 < b_1, \\ \ldots \\ \sum_{d=1}^{l_r} x_d^2 < b_r.}} \cdots \int x_i P_{1,\ldots,t}(x_1, \ldots x_t)$$

$$= \int\limits_{\substack{\sum_{d=1}^{k_1} y_d < c_1, \\ \ldots \\ \sum_{d=1}^{k_r} y_d < c_r; \\ \sum_{d=1}^{k_1} y_d^2 < b_1, \\ \ldots \\ \sum_{d=1}^{k_r} y_d^2 < b_r.}} \cdots \int y_j P_{1,\ldots,t}(x_1, \ldots x_t) = \int\limits_B \xi_j d\mathbb{P}$$

По определению сигма-алгебры $\mathcal{F}_{k+1}$ она порождается классом $\mathcal{L}$, другими словами выполняется равенство $\mathcal{F}_{k+1} = \sigma(\mathcal{L})$. Мы видим, что выполняются все условия леммы 5.1, согласно которой $\mathcal{F}_{k+1} = \sigma(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{Z}$. Так как $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$, то $\mathcal{Z} = \mathcal{F}_{k+1}$. Это означает, что равенства (5.12) и ((5.13)) выполняются для всех $B \in \mathcal{F}_{k+1}$. Лемма доказана.

Лемма 5.2 справедлива для случайных величин $\xi_k,\ k \in \mathbb{N}$, с конечной дисперсией. Следующая лемма справедлива для случайных величин $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$, без предположения о существовании каких-либо моментов.
Фиксируем числа $n,\ m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$Y_j = \left(\frac{n}{n+m-j} \frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}} \right)^2,\ j = 1, \ldots, m.$$

Лемма 5.3. *Для любого $t > 0$ случайные величины e^{tY_j}, $j = 1, \ldots m$, образуют субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_{n+m+-j}$, $j = 1, 2, \ldots m$.*

Доказательство. Для удобства читателя приводится известное доказательство леммы (см. [6] после леммы 1).

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathbb{E}(\exp\{tY_j\}|\mathcal{F}_d) \ge \exp\{tY_d\}$, для $d > j$.

Рассмотрим случай $\mathbb{E}\xi_1^2 < \infty$. С помощью неравенства Йенсена для условных математических ожиданий, (5.6) и (5.7) получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(e^{tY_j}|\mathcal{F}_{n+m-j+1}\right) \geq \exp\{t\mathbb{E}(Y_j|\mathcal{F}_{n+m-j+1})\} \\
&= \exp\{t\mathbb{E}\left(\left(\frac{n}{(n+m-j)}\frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}}\right)^2 \Big|\mathcal{F}_{n+m-j+1}\right)\} \\
&\geq \exp\left\{t\mathbb{E}\left(\left(\frac{n}{(n+m-j)}\frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j+1}}\right)^2 \Big|\mathcal{F}_{n+m-j+1}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{t\left(\frac{n}{n+m-j}\right)^2 \mathbb{E}(T^2_{n+m-j}|\mathcal{F}_{n+m-j+1})\frac{1}{W^2_{n+m-j+1}}\right\} \qquad (5.14) \\
&\geq \exp\left\{t\left(\frac{n}{n+m-j}\right)^2 (\mathbb{E}(T_{n+m-j}|\mathcal{F}_{n+m-j+1}))^2\frac{1}{W^2_{n+m-j+1}}\right\} \\
&= \exp\left\{t\left(\frac{n}{n+m-j}\right)^2 \left(\frac{n+m-j}{n+m-j+1}T_{n+m-j+1}\right)^2\frac{1}{W^2_{n+m-j+1}}\right\} \\
&= \exp\left\{t\left(\frac{n}{n+m-j+1}\frac{T_{n+m-j+1}}{W_{n+m-j+1}}\right)^2\right\} = e^{tY_{j-1}} \text{ п.в.}
\end{aligned}$$

Откажемся от предположения, что $\mathbb{E}\xi_1^2 < \infty$. Обозначим $\mathbb{1}_A$ индикаторную функцию события $A \in \mathcal{F}$ и $\xi_k^{(r)} = X_k\mathbb{1}_{\{|\xi_k|\leq r\}}$ для $k = 1, \ldots, n$ и $r \in \mathbb{N}$. Построим случайные величины $S_k^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \cdots + \xi_k^{(r)}$ и $Y_k^{(r)}$ по аналогии с S_k и Y_k. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} Y_k^{(r)} = Y_k \text{ п.в.}, \\
&\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}|Y_k^{(r)} - Y_k| = 0.
\end{aligned} \qquad (5.15)$$

По доказанному выше выполняется неравенство $Y_k^{(r)} \leq \mathbb{E}(Y_{k+1}^{(r)}|\mathcal{F}_{n+m-k})$ п.в. Полагая $r \to \infty$, мы получим неравенство $Y_k \leq \mathbb{E}(Y_{k+1}|\mathcal{F}_{n+m-k})$ п.в. Известно, что условия (5.15) достаточны для предельного перехода под знаком условного математического ожидания. Для любого $t > 0$ выпуклая функция $\exp\{tx), x \geq 0$, возрастает. Поэтому последовательность $\exp\{tY_k\}, k = 1, \ldots, m$, образует субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_{n+m-k}, k = 1, \ldots, m$. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Для любых $x > 0$ и $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq m} \frac{n}{n+j}\frac{|T_{n+j}|}{W_{n+j}} > x\right) \leq e^{-tx^2}\mathbb{E}e^{t(\frac{T_n}{W_n})^2}. \tag{5.16}$$

Доказательство. По лемме 5.3 случайные величины e^{tY_j}, $j = 1, \dots, m$ образуют субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_{n+m-j}$, $j = 1, \dots, m$. По максимальному неравенству Дуба для субмартингалов (см. [25]) мы получим

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq m} \frac{n}{n+j}\frac{|T_{n+j}|}{W_{n+j}} > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq m} t\left(\frac{n}{n+m-j}\frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}}\right)^2 > tx^2\right) =$$
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq m} e^{tY_j} \geq e^{tx^2}\right) \leq e^{-tx^2}\mathbb{E}e^{tY_n} = e^{-tx^2}\mathbb{E}e^{t(T_n/W_n)^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ - симметричные независимые случайные величины , то*

$$\mathbb{E}\exp\{t(T_n/W_n)^2)\} \leq \frac{2}{1-2t},\ \forall t < 1/2. \tag{5.17}$$

Доказательство леммы можно найти в [6].

Лемма 5.6. *Пусть $n_r = [\exp\{r/(log\ r)^2\}]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_r}{n_{r+1}} = 1. \tag{5.18}$$

Доказательство. Функция $\exp\{x\}$ - монотонно возрастающая непрерывная функция. Функция $r/(log\ r)^2$ - непрерывная монотонно возрастающая функция на $(0, \infty)$. Так как класс непрерывных функций замкнут относительно операции композиции, то функция $\exp\{r/(log\ r)^2\}$ - непрерывная монотонно возрастающая на $(0, \infty)$ и

$$1 = \lim_{r\to\infty} \frac{\exp\{r/(log\ r)^2\}}{\exp\{(r)/(log(r))^2\}} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{\exp\{r/(log\ r)^2\}}{\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}}$$
$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{\exp\{r+1/(log\ (r+1))^2\}}{\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}} = 1.$$

Значит

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\exp\{r/(log\ r)^2\}}{\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}}=1. \tag{5.19}$$

Теперь рассмотрим функцию $n_r=[\exp\{r/(log\ r)^2\}]=\exp\{r/(log\ r)^2\}-\gamma$, где γ - некоторое число, $0\le\gamma<1$. Обозначим для n_r $\gamma=\alpha$, для n_{r+1} $\gamma=\beta$. Из (5.19) следует

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty}\frac{n_r}{n_{r+1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{\exp\{r/(log\ r)^2\}-\alpha}{\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}-\beta}\\
&=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\exp\{r/(log\ r)^2\}}{\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}-\beta}+\frac{\alpha}{\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}-\beta}\right)\\
&=\lim_{r\to\infty}\frac{\exp\{r/(log\ r)^2\}/\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}}{1-\beta/\exp\{(r+1)/(log(r+1))^2\}}=1
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

5.3 Доказательство теоремы 5.1

Сначала мы докажем утверждение 5.4. Заметим, что функция $\lambda(n), n\in\mathbb{N}$, принимает целые неотрицательные значения и обладает следующими просто проверяемыми свойствами:

$$\begin{aligned}
&1.\ \lambda(n)<n \text{ для } n\in\mathbb{N},\ n\ge 2,\\
&2.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(n)}{n}=1,\\
&3.\ \lim_{n\to\infty}(n-\lambda(n))=\infty.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Обозначим $n_r=[\exp\{r/(\log r)^2]$ для всех $r\in\mathbb{N}, r\ge 2$ и $n_1=1$. По лемме 5.3 с $n=\lambda(n_r)$ и $m=n_{r+1}-\lambda(n_r)$ для любого $t>0$ случайные величины $exp\{tY_k\}, k=1,\ldots,m$, образуют субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_{n+m-k}, k=1,\ldots,m$. Обозначим

$$A_r=\Big\{\max_{\lambda(n_r)\le k<n_{r+1}}\frac{\lambda(n_r)}{\lambda(n_r)+k}\frac{|T_k|}{W_k}>x(2\log r)^{1/2}\Big\}, r\in\mathbb{N}, x>0.$$

Событие A_r можно записать в следующем виде

$$A_r = \Big\{ \max_{1\le k\le m} \frac{n}{n+m-k}\frac{|T_{n+m-k}|}{W_{n+m-k}} > x(2\log r)^{1/2} \Big\}$$
$$= \{ \max_{1\le k\le m} \exp\{tY_k\} > \exp\{2x^2 t\log r\}\}$$

По лемме 5.4 мы получим

$$\mathbb{P}\{A_r\} \le \exp\{-2x^2 t \log r\}\mathbb{E}e^{tY_m} = \\ \exp\{-2x^2 t\log r\}\mathbb{E}\exp\{t(T_{\lambda(n_r)}/W_{\lambda(n_r)})^2\}. \tag{5.21}$$

В лемме 2.4 доказано неравенство $\sup_{n\ge 1}\mathbb{E}\exp\{c(S_n/V_n)^2\} = Const < \infty$ для некоторой постоянной $c > 0$. Положив $t = c$ и $x = \sqrt{2/c}$ в (5.21), мы получим $\mathbb{P}\{A_r\} \le 1/r^2$ и $\sum_{r=1}^\infty \mathbb{P}\{A_r\} < \infty$. По лемме Бореля-Кантелли (см. например [27], стр. 327) выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty}(2\log r)^{-1/2}\max_{\lambda(n_r)\le k<n_{r+1}}\frac{\lambda(n_r)}{n_r+k}\frac{|T_k|}{W_k} \le x = \sqrt{2/c} \text{ п.в.}$$

Нетрудно убедится, что $\lim_{r\to\infty} n_{r+1}/n_r = 1$ и $\lim_{r\to\infty}\log\log n_r/\log r = 1$. Отсюда и из первого утверждения в (5.20) следует, что $\lim_{r\to\infty}\lambda(n_r)/n_{r+1} = 1$. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\limsup_{r\to\infty}(2\log\log n_r)^{-1/2}\max_{\lambda(n_r)\le k<n_{r+1}}\frac{|T_k|}{W_k} \le 2\sqrt{2/c} \text{ п.в.} \tag{5.22}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что $n_r \le n < n_{r+1}$ и, следовательно, выполняется неравенство

$$\max_{\lambda(n)\le k\le n}\frac{|T_k|}{W_k} \le \max_{\lambda(n_r)\le k<n_{r+1}}\frac{|T_k|}{W_k}.$$

Это неравенство вместе с (5.22) доказывают утверждение (5.2).

Докажем утверждение 5.3. По лемме 5.5, если случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, симметричны, то $\mathbb{E}\exp\{tS_n^2/V_n^2\} \le 2/(1-2t)$ для любого $t < 1/2$. Неравенство (5.21) теперь принимает следующий вид

$$\mathbb{P}\{A_r\} \le \exp\{-2x^2 t\log r\}\mathbb{E}e^{tY_m} = \exp\{-2x^2 t\log r\}\frac{2}{1-2t}, t < \frac{1}{2}.$$

Положим $x = 1 + \varepsilon$, где ε – любое положительные число. Найдется $t, 0 < t < 1/2$, такое, что $2(1+\varepsilon)^2 t > 1$. Для таких x и t из предыдущего неравенства следует, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_r\} \leq \frac{2}{1-2t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2x^2 t}} < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} (2\log r)^{-1/2} \max_{\lambda(n_r)\leq k<n_{r+1}} \frac{\lambda(n_r)}{n_r+k} \frac{|T_k|}{W_k} \leq 1+\varepsilon \text{ п.в.}$$

Из свойств чисел $n_r, r \in \mathbb{N}$, и функции $\lambda(n), n \in \mathbb{N}$, упомянутых при доказательстве первого утверждения, следует, что

$$\limsup_{r\to\infty} (2\log\log n_r)^{-1/2} \max_{\lambda(n_r)\leq k<n_{r+1}} \frac{|T_k|}{W_k} \leq 1+\varepsilon \text{ п.в.}$$

Снова, с помощью заключительных рассуждений из доказательства первого утверждения, можно убедиться, что

$$\limsup_{n\to\infty} (2\log\log n)^{-1/2} \max_{\lambda(n)\leq k<n} \frac{|T_k|}{W_k} \leq 1+\varepsilon \text{ п.в.} \tag{5.23}$$

Это неравенство выполняется на событии Ω_ε единичной вероятности. Неравенство (5.23) выполняется на событии $\Omega' = \cap_{l=1}^{\infty} \Omega_{1/l}$ единичной вероятности для любого $\varepsilon = 1/l, l \in \mathbb{N}$. Полагая $\varepsilon = 1/l \to 0$ в (5.23), мы получим (5.3). Теорема доказана.

5.4 Доказательство теоремы 5.2

Сначала мы докажем утверждение (5.4).

Предположим, что независимые случайные величины ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ имеют общее распределение, совпадающее с распределением случайной величины Z_i для некоторого $i = 1, \ldots, l$. По первому утверждению (5.2) теоремы 5.1 существует число $c \geq 0$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|T_n|}{W_n\sqrt{\log\log n}} \leq c \text{ п.в.}$$

Отсюда , в силу (5.1), следует, что существует число $c_i \geq 0$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_{i,n}|}{V_{i,n}\sqrt{\log\log m_{i,n}}} \leq c_i \text{ п.в.} \tag{5.24}$$

Заметим, что $m_{i,n} < n$ и $V_{i,n}^2 \leq V_n^2 = \sum_{i=1}^l V_{i,n}^2$. По неравенству Минковского мы получим

$$\Big(\frac{|S_n|}{V_n\sqrt{\log\log n}}\Big)^2 = \Big(\frac{|\sum_{i=1}^l S_{i,n}|}{V_{i,n}\sqrt{\log\log m_{i,n}}}\frac{\sqrt{\log\log m_{i,n}}}{\sqrt{\log\log n}}\frac{V_{i,n}}{V_n}\Big)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^l \Big(\frac{|S_{i,n}|}{V_{i,n}\sqrt{\log\log m_{i,n}}}\Big)^2 \sum_{i=1}^l \frac{V_{i,n}^2}{V_n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^l \Big(\frac{|S_{i,n}|}{V_{i,n}\sqrt{\log\log m_{i,n}}}\Big)^2.$$

Отсюда, с учетом (5.24), следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \Big(\frac{|S_n|}{V_n\sqrt{\log\log n}}\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^l c_i^2 \text{ п.в.}$$

и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{V_n\sqrt{\log\log n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^l c_i^2} \text{ п.в.}$$

Утверждение (5.4) доказано.

Докажем теперь утверждение (5.5). В лемме 5.3 было доказано, что случайные величины

$$Y_j = \left(\frac{n}{n+m-j}\frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}}\right)^2, j = 1, \ldots, m,$$

образуют субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_{n+m-j}, j = 1, \ldots, m$. По максимальному неравенству для моментов для положительных мартингалов ([25], стр. 134) получим

$$\mathbb{E}(\max_{1\leq j\leq m} Y_j^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}Y_m^p, \ p \in \mathbb{N}, \ p \geq 2.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\right) &= \mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+m-j}^2}{W_{n+m-j}^2}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m}\left(\frac{n+m-j}{n}\frac{n}{n+m-j}\frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}}\right)^2\right)\\ &\le \frac{(n+m)^2}{n^2}\mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m}\left(\frac{n}{n+m-j}\frac{T_{n+m-j}}{W_{n+m-j}}\right)^2\right)\\ &= \frac{(n+m)^2}{n^2}\mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m} Y_j\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\Big)^p &= \mathbb{E}\Big(\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+m-j}^2}{W_{n+m-j}^2}\Big)^p\\ &\le \Big(\frac{(n+m)^2}{n^2}\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}Y_m^p,\ p\in\mathbb{N},\ p\ge 2.\end{aligned} \tag{5.25}$$

По максимальному неравенству Дуба (см. [28])

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\right) \le \frac{(n+m)^2}{n^2}\mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m} Y_j\right) \le \frac{e}{e-1}(1+\mathbb{E}(Y_m\ln^+ Y_m)).$$

Напомним, что e обозначает основание натурального логарифма, а символ $\ln^+ x$ положительную часть функции $\ln x, x>0$. Так как $\ln x^+ \le x$, то

$$\mathbb{E}\Big(\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\Big) \le \frac{(n+m)^2}{n^2}\mathbb{E}\left(\max_{1\le j\le m} Y_j\right) \le \frac{e}{e-1}(1+\mathbb{E}Y_m^2). \tag{5.26}$$

Известно, что $(p/(p-1))^p \uparrow e$ при $p\to\infty$. Поэтому $\sup_{p\ge 2}(p/(p-1))^p \le e$.

Для любого $0 < t < 1/20$ из (5.25) и (5.26) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\left\{t\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\right\} &= 1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\mathbb{E}\Big(t\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\Big)^p\\ &\le 1+\frac{te}{e-1}+2e\sum_{p=2}^{\infty}\Big(\frac{t(n+m)^2}{n^2}\Big)^p\mathbb{E}Y_m^p\\ &\le 1+\frac{te}{e-1}+2e\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\frac{t(n+m)^2}{n^2}\Big)^p\mathbb{E}Y_m^p\\ &= 1+\frac{te}{e-1}+2e\mathbb{E}\exp\left\{t\frac{(n+m)^2}{n^2}Y_m\right\}.\end{aligned}$$

Так как $te/(e-1)\le 1$ для $0<t<1/2$, то

$$\mathbb{E}\exp\left\{t\max_{1\le j\le m}\frac{T_{n+j}^2}{W_{n+j}^2}\right\}\le 4e\mathbb{E}\exp\left\{t\frac{(n+m)^2}{n^2}Y_m\right\}. \tag{5.27}$$

Воспользуемся знакомыми обозначениями

$$n_1=n_2=1, n_r=[exp\Big\{\frac{r}{(\log r)^2}\Big\}],\ n\ge 3.$$

Неравенство (5.27) выполняется для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n, n\in\mathbb{N}$. Мы будем считать, что их распределения совпадают с распределением случайной величины Z_i. Обозначим m_{i,n_r} число случайных величин среди $X_1,\dots,X_{n_r}$, которые одинаково распределены со случайной величиной Z_i. Обозначим $n=m_{i,n_r}^{(r)}, m=m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)}-m_{i,n_r}^{(r)}$ для $r>10$. Занумеруем случайные величины, входящие в $\mathcal{M}_{i,n}$, скажем, $X_1^{(i)},\dots,X_{m_{i,n}}^{(i)}$. Неравенство (5.27) для этих случайных величин принимает следующий вид

$$\mathbb{E}\exp\left\{t\max_{1\le j\le m}\frac{(\sum_{k=1}^{j})X_k^{(i)})^2}{(\sum_{k=1}^{j}(X_k^{(i)})^2}\right\}\le 4e\mathbb{E}\exp\left\{t\frac{n_{r+1}^2}{n_r^2}\left(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n_r}}X_k\right)^2/V_{i,n_r}^2\right\}. \tag{5.28}$$

Заметим, что $m_{i,n}<n$ и $V_{i,n}^2\le V_n^2=\sum_{i=1}^{l}V_{i,n}^2$. По неравенству Минков-

ского мы получим

$$\Big(\frac{|S_n|}{V_n}\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{V_{i,n}}\Big|\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k\Big|\frac{V_{i,n}}{V_n}\Big)^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{|\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k|}{V_{i,n}}\right)^2 \sum_{i=1}^{l}\frac{V_{i,n}^2}{V_n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{|\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n}} X_k|}{V_{i,n}}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{n\le n_r}\frac{S_n^2}{V_n^2} \le \sum_{i=1}^{l}\max_{1\le j\le m}\frac{(\sum_{k=1}^{j} X_k^{(i)})^2}{(\sum_{k=1}^{j}(X_k^{(i)})^2)}.$$

Так как случайные величины независимы, то

$$\mathbb{E}\exp\Big\{t\max_{n\le n_r}\frac{|S_n|^2}{V_n^2}\Big\} \le \mathbb{E}\exp\Big\{t\sum_{i=1}^{l}\max_{1\le j\le m}\frac{(\sum_{k=1}^{j} X_k^{(i)})^2}{(\sum_{k=1}^{j}(X_k^{(i)})^2)}\Big\}$$

$$= \prod_{i=1}^{l}\mathbb{E}\exp\Big\{t\max_{1\le j\le m}\frac{(\sum_{k=1}^{j} X_k^{(i)})^2}{(\sum_{k=1}^{j}(X_k^{(i)})^2)}\Big\}.$$

Это неравенство вместе с неравенством (5.28) влечет, что

$$\mathbb{E}\exp\Big\{t\max_{n\le n_r}\frac{|S_n|^2}{V_n^2}\Big\} \le (4e)^l\prod_{i=1}^{l}\mathbb{E}\exp\Big\{t\frac{(m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)})^2}{(m_{i,n_r}^{(r)})^2}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n_r}} X_k)^2/V_{i,n_r}^2\Big\}.$$

По лемме 5.5 выполняется неравенство

$$\mathbb{E}\exp\Big\{t\frac{(m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)})^2}{(m_{i,n_r}^{(r)})^2}(\sum_{k\in\mathcal{L}_{i,n_r}} X_k)^2/V_{i,n_r}^2\Big\} \le \frac{1}{1-2t(m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)})^2/(m_{i,n_r}^{(r)})^2}$$

и, следовательно,

$$\mathbb{E}\exp\Big\{t\max_{n\le n_r}\frac{|S_n|^2}{V_n^2}\Big\} \le (4e)^l\prod_{i=1}^{l}\frac{1}{1-2t(m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)})^2/(m_{i,n_r}^{(r)})^2}. \tag{5.29}$$

Далее можно рассуждать как при доказательстве второго утверждения из теоремы 5.1. Обозначим

$$A_r = \{\max_{1\le j\le n_{r+1}-n_r} \frac{n_r}{n_r+j}\frac{|S_{n_r+j}|}{V_{n_r+j}} > x(2\log r)^{1/2}\}.$$

По неравенству (5.29) и по неравенству Маркова мы получим

$$\mathbb{P}\{A_r\} \le \exp\{-2x^2 t\log r\}\frac{(4e)^l}{(1-2tn_{r+1}^2/n_r^2)^l}$$

Положим $x = 1+\varepsilon$, где ε - произвольное положительное число. Так как $\lim_{r\to\infty} n_{r+1}/n_r = 1$ то $\lim_{r\to\infty} m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)}/m_{i,n_r}^{(r)} = 1$ для любого $i = 1,\dots,l$ в силу условия (5.1). Поэтому найдутся $t\in(0,1/2)$ и $r_0\in\mathbb{N}$ такие, что $2xt = 2(1+\varepsilon)t > 1$ и неравенство $2t(m_{i,n_{r+1}}^{(r+1)}/m_{i,n_r}^{(r)})^2 < c_0 < 1$ выполняется для всех $r\ge r_0$ и для всех $i=1,\dots,l$. Из предыдущего неравенства следует, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathbb{P}\{A_r\} \le \sum_{r=1}^{r_0}\mathbb{P}\{A_r\} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty}\frac{1}{r^{2xt}}\frac{(4e)^l}{(1-c_0)^l} < \infty.$$

Далее можно рассуждать как при доказательстве заключительной части второго утверждения в теореме 5.1. В результате мы получим

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{V_n}(2\log\log n)^{-1/2} \le 1 \text{ п.в.}$$

Теорема доказана.

Заключение

В диссертации для самонормированных сумм, построенных по независимым случайным величинам, распределения которых принадлежат одному из конечного числа типов, доказаны: критерии слабой компактности, аналог центральной предельной теоремы, новый вариант закона повторного логарифма, обобщения известных законов повторного логарифма.

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Критерии слабой компактности самонормированных сумм для однотипных и многотипных независимых случайных величин. Теоремы 1.3 и 3.2.

2. Аналог центральной предельной теоремы для самонормированных сумм независимых случайных величин, распределения которых принадлежат одному типу. Теорема 4.1.

3. Равномерный закон повторного логарифма для независимых одинаково распределенных случайных величин. Теорема 5.1.

Перечисленные результаты демонстрируют, что основные вероятностные закономерности распространяются на более широкий класс случайных величин, чем было известно ранее.

Литература

[1] Efron B. Student's t -test under symmetry conditions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 64:1278–1302, 1969.

[2] Qi-Man Shao. Self-normalized limit theorems in probability and statistics. *Hong Kong University of Science and Technology.*

[3] Chistyakov G., Götze F. Limit distributions of studentized means. *Ann. Probab.*, 32:28–77, 2004.

[4] Егоров В.А. Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения*, 41:643–650, 1996.

[5] Mason D.M., Zinn J. When does a randomly weighted self-normalized sum converge in distribution. *Electronic Communications in Probability*, 10:70–81, 2005.

[6] Giné E., Mason D.M. On the lil for self-normalized sums of iid random variables. *Theor. Prob.*, 11:351–370, 1997.

[7] Pruitt W.E. General one-sided laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.*, 9, No. 1:1–48, 1981.

[8] Griffin P., Kuelbs J. Self-normalized laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.*, 17:1571–1601, 1989.

[9] Griffin P., Kuelbs J. Some extentions of the laws of the iterated logarithm via self-normalizations. *Ann. Probab.*, 19:380–395, 1991.

[10] Griffin P. The tightness of the student t-statistic. *Department of Mathematics, Syracuse University, Syracuse, NY 13244-1150, U.S.A.*, 1:100, 2012.

[11] Новак С.Ю. О самонормированных суммах случайных величин и статистике Стьюдента. *Теория вероятностей и ее применения*, 49:365–373, 2004.

[12] Wang Q., Jing B.Y. An exponential nonuniform berry-esseen bound for self-normalised sums. *Ann. Probab.*, 27:2068–2088, 1999.

[13] Нагаев С.В. О больших уклонениях автормированной суммы. *Теория вероятностей и ее применения*, 49:794–802, 2004.

[14] Bing-Yi Jing, Qi-Man Shao, Qiying Wang. Self-normalized cramer-type large deviations for independent random variables. *The Annals of Probability*, 31:2167–2215, 2003.

[15] S.V. Novak. A new characterization of the normal law. *Statistical and Probability Letters*, 77:95–98, 2007.

[16] Жданов И.И. Слабая сходимость самонормированных сумм независимых случайных величин к нормальному закону. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 4:63–74, 2011.

[17] Жданов И.И. Слабая компактность статистики Стьюдента. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 4:71–83, 2013.

[18] Giné E., Götze F., Mason D.M. When the student t-statistic asymptotically standard normal? *Ann. Probab.*, 25:1514–1531, 1997.

[19] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Гостехиздат, 1949.

[20] Durrett R. *Probability theory and Examples, 2nd edition.* Duxburry Press, 1995.

[21] Крамер Г. *Математические методы статистики, 2-е издание.* Мир, 1975.

[22] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины.* Наука, 1965.

[23] O'Brien G.L. A limit theorem for sample maxima and heavy branches in galton-watson trees. *Appl. Probab.*, 17:539–545, 1980.

[24] Bingham N.M. Variants of low of the iterated logarithm. *Bull. London Math. Soc.*, 18:433–467, 1986.

[25] Круглов В.М. *Случайные процессы.* Бакалавр, 2013.

[26] Sierpiáski W. Un theoreme general sur les familles dénsembles. *Fundamenta Mathematicae*, 12:206–210, 1928.

[27] Ширяев А.Н. *Вероятность. В 2-х кн. - 3-е изд.* МЦНМО, 2004.

[28] Дуб Д. Л. *Вероятностные процессы.* Иностранная литература. М., 1956.