

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет

На правах рукописи  
УДК 519.112.4+519.174  
+519.176+519.179.4

Рубанов Олег Игоревич

# **ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ**

Специальность 01.01.09 —  
«дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. А.М. Райгородский

Москва – 2014

# Содержание

<b>Обозначения</b>	<b>4</b>
<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 История вопроса и формулировки результатов</b>	<b>9</b>
1.1 История вопроса . . . . .	9
1.2 Нижние оценки хроматических чисел трёхмерных графов расстояний с запретами на клики . . . . .	18
1.3 Нижние оценки хроматических чисел графов расстояний с запретами на клики в растущей размерности . . . . .	19
1.3.1 Результаты с одним запрещённым расстоянием . . . . .	19
1.3.2 Сравнение оценок $\zeta_{\text{clique}}(k)$ в теоремах 4, 5, 6 и 7 . . . . .	21
1.3.3 Результаты с несколькими запрещёнными расстояниями	24
1.3.4 Таблицы результатов теоремы 8 . . . . .	25
<b>2 Хроматические числа трёхмерных графов расстояний без тетраэдров и треугольников</b>	<b>32</b>
2.1 Доказательство теоремы 2 . . . . .	32
2.2 Доказательство теоремы 3 . . . . .	35
2.2.1 Основная часть доказательства теоремы 3 . . . . .	35
2.2.2 Доказательство предложения 2 . . . . .	43
2.2.3 Построение графа $\mathcal{F}$ «шевелением»: вспомогательные леммы . . . . .	44
2.2.4 Процедура «шевеления» . . . . .	48

<b>3</b>	<b>Асимптотика хроматических чисел графов расстояний с несколькими запрещёнными расстояниями и без больших клик при росте размерности пространства</b>	<b>52</b>
3.1	Доказательство теоремы <b>6</b> . . . . .	52
3.2	Доказательство теоремы <b>7</b> . . . . .	58
3.3	Доказательство теоремы <b>8</b> . . . . .	59
3.4	Небольшой комментарий к теореме <b>8</b> . . . . .	61
3.5	Решение экстремальной задачи . . . . .	62
	<b>Список литературы</b>	<b>64</b>

# Обозначения

- $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$
- $|\mathbf{x}|, |A - X|$  — модуль вектора  $\mathbf{x}$ ,  $\overrightarrow{AX}$
- $\overrightarrow{OX}$  — вектор из начала координат в точку  $X$
- $\mathbb{E}Y$  — математическое ожидание случайной величины  $Y$
- $\mathbb{P}(Z)$  — вероятность события  $Z$ .
- 1 — глава 1
- 1.2 — раздел 2 главы 1
- 1.2.3 — пункт 3 раздела 2 главы 1

# Введение

В работе изучаются классы графов расстояний с несколькими специальными свойствами. Задача данной работы — найти графы расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик. *Граф расстояний* — это граф, вершинами которого являются точки некоторого метрического пространства, а рёбра проведены между теми и только теми вершинами, расстояние между которыми равно некоторому фиксированному числу (так называемое «запрещённое расстояние»). Под *хроматическим числом* понимается минимальное количество цветов, в которые можно покрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были покрашены в разные цвета. *Клика* — это набор вершин, попарно соединённых рёбрами (другими словами, *полный подграф*). Рассматриваются как графы расстояний с одним, так и с несколькими запрещёнными расстояниями.

Задача тесно связана с задачей нижней оценки хроматических чисел пространств. Хроматическим числом метрического пространства называется минимальное количество цветов, в которые можно покрасить все точки этого пространства так, чтобы никакие две точки одного цвета не находились на единичном расстоянии друг от друга. Обобщением этой задачи является задача нахождения хроматического числа пространства с  $k$  запрещёнными расстояниями. В этом случае вершины не должны быть одного цвета, если расстояние между ними запрещённое.

Графы расстояний как с одним, так и с несколькими запрещёнными расстояниями естественным образом дают нижнюю оценку хроматического числа соответствующего пространства, поскольку если вершины графа нельзя покрасить в  $t$  цветов правильным образом, то и все точки метрического пространства (а множество вершин графа — это подмножество точек метрического пространства) тоже нельзя покрасить правильным

образом. Именно нижние оценки хроматических чисел графов расстояний с определёнными свойствами и будут основным объектом исследования в этой работе.

Проблема хроматического числа пространства впервые была озвучена Э. Нельсоном в 1950 году, который пришёл к ней, изучая *проблему четырёх красок* (в своей книге [1] А. Сойфер приводит небольшое исследование истории вопроса, включая свидетельства самого Э. Нельсона и его профессоров, однако долгое время вопрос авторства этой задачи оставался открытым). Э. Нельсон сформулировал её для случая плоскости. Своей популярностью задача во многом обязана Г. Хадвигеру, П. Эрдёшу, М. Гарднеру и братьями Л. и В. Мозерам. Поэтому в литературе проблема получила название *проблемы Нельсона–Хадвигера* или *Нельсона–Эрдёша–Хадвигера*.

Мы поговорим про результаты в этой области более подробно в основной части работы, а здесь заметим лишь, что для проблемы одного запрещённого расстояния в  $\mathbb{R}^2$  доказано только, что хроматическое число (обозначаемое  $\chi(\mathbb{R}^2)$ ) лежит между четырьмя и семью ( $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ ). Подобным образом, не известны точные оценки для пространств больших размерностей. Получено, что в асимптотике хроматическое число растёт экспоненциально в зависимости от размерности пространства, но точное значение основания экспоненты также не определено до сих пор<sup>1</sup>.

В 1976 году П. Эрдёш (см. [2]) поставил вопрос: существует ли на плоскости граф расстояний с хроматическим числом четыре и не содержащий треугольников? Надо сказать, что П. Эрдёш предполагал, что ответ будет отрицательным. Однако эта задача была решена (с положительным ответом) Н. Уормалдом (см. [3]), а позднее — П. О’Доннеллом и Р. Хохбергом (см. [4]) в более общей постановке. В 2000 году П. О’Доннелл показал, что для произвольного наперед заданного числа  $k$  можно построить граф расстояний на плоскости без циклов длины, меньшей  $k$  (размер кратчайшего простого цикла в графе называется *обхватом* этого графа).

---

<sup>1</sup>Подробнее об этом будет сказано в основной части работы, заметим лишь, что на данный момент известно, что  $(1.239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$ .

П. Эрдёш не случайно задал вопрос именно таким образом. Наличие треугольника естественно повышает хроматическое число графа до трёх, поэтому можно предположить, что наличие треугольников упрощает построение графов с большим хроматическим числом. Аналогично, в больших размерностях бывают симплексы (в нашем случае симплексы и клики — это одно и то же) больших размеров, поэтому можно ожидать, что в примерах графов с большим хроматическим числом содержатся клики большого размера. Таким образом, естественным обобщением задачи П. Эрдёша является задача построения графов расстояний в пространствах больших размерностей, которые не содержат клик как можно меньшего размера и при этом имеют как можно большее хроматическое число.

В **первой главе** мы более подробно поговорим об истории проблемы и ранее полученных результатах, а также введём необходимые обозначения и сформулируем результаты диссертации, которые будут доказаны в последующих главах.

Подходы к получению нижних оценок хроматического числа в малых и больших размерностях принципиально различаются. В малых размерностях улучшение результатов связано с увеличением оценки хроматического числа на единицу (или изредка большее целое число). Так, например, в 2002 году О. Нечуштан улучшил нижнюю оценку  $\chi(\mathbb{R}^3)$  с пяти до шести (см. [5]). В больших же размерностях борьба идёт за улучшение основания экспоненты в асимптотике нижней оценки хроматического числа. К примеру, А.М. Райгородскому в 2000 году (см. [6]) удалось улучшить нижнюю оценку  $\chi(\mathbb{R}^n)$  с  $(1.207\dots + o(1))^n$  до  $(1.239\dots + o(1))^n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В данной диссертации изучаются обе ситуации, и это естественным образом делит доказательства результатов на две части. Во **второй главе** диссертации будут получены результаты для трёхмерного пространства. А именно, будут описаны примеры графов с хроматическим числом 5 без тетраэдров и без треугольников. В **третьей главе** изучается целый класс задач в растущей размерности. Во-первых, получены нижние оценки хроматических чисел графов расстояний без клик большого размера с одним запрещённым расстоянием. Во-вторых, рассматривается более общая задача о хроматических числах графов расстояний без клик большого размера с

несколькими запрещёнными расстояниями. Представленный метод позволяет получить нижние оценки хроматических чисел таких графов для почти любого максимального размера клики и количества запрещённых расстояний.



# Глава 1

## История вопроса и формулировки результатов

### 1.1 История вопроса

Прежде чем приступить к освещению истории вопроса и основных результатов данной работы, мы определим основные объекты исследования, которые необходимы для этого описания.

Несмотря на то, что работа посвящена *хроматическим числам геометрических графов*, изучение этих графов началось с изучения *хроматического числа пространства*, поэтому для начала мы определим оба понятия.

**Определение 1.** *Графом  $G = (V, E)$  называется пара множеств  $V$  и  $E$ , где  $V$  — это произвольное множество<sup>1</sup>, а  $E$  — это некоторое множество пар элементов  $V$ <sup>2</sup>. Элементы множества  $V$  называются **вершинами**, а элементами множества  $E$  называются **рёбрами**.*

**Определение 2.** *Хроматическим числом метрического пространства  $\mathbb{M}$  называется минимальное такое число  $k$ , что множество  $\mathbb{M}$  можно разбить*

---

<sup>1</sup>Хотя в большинстве случаев рассматриваются конечные множества.

<sup>2</sup>Опять же, в зависимости от приложений, в этом определении бывают нюансы. В наиболее стандартном варианте рассматриваются только такие  $E$ , где два элемента из пары различны (другими словами, нет «петель»), одна и та же пара не повторяется дважды (то есть, в нём нет «кратных рёбер») и порядок элементов в паре не имеет значения (граф не «ориентированный»). Мы будем пользоваться именно этим стандартным определением, хотя в других ситуациях бывают полезны другие вариации этого определения.

на  $k$  непересекающихся подмножеств  $\mathbb{M} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \dots \sqcup M_k$  так, что любые два элемента этого пространства, находящиеся на единичном расстоянии, находятся в разных подмножествах. То есть если  $|a_1 a_2| = 1$  и  $a_1 \in M_i$ , то  $a_2 \notin M_i$ . Обозначается хроматическое число  $\chi(\mathbb{M})$ .

**Определение 3.** Хроматическим числом графа  $G = (V, E)$  называется минимальное такое число  $k$ , что множество вершин  $V$  можно разбить на  $k$  непересекающихся подмножеств  $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_k$  так, что любые две вершины графа, соединённые ребром, находятся в разных подмножествах. Иными словами, если  $\{v_1, v_2\} \in E$  и  $v_1 \in V_i$ , то  $v_2 \notin V_i$ . Обозначается хроматическое число графа  $\chi(G)$ .

Подмножества, на которые разбиваются множества точек пространства или вершин в определениях 2 и 3, соответственно, часто называются «цветами». Отсюда и пошло название «хроматического числа» (*χρῶμα* по-гречески — «цвет»).

Несложно заметить, что два определения очень похожи друг на друга. Действительно, если в качестве множества вершин графа в определении 3 взять множество точек пространства  $\mathbb{M}$ , а в качестве его рёбер — те пары точек, расстояние между которыми равно единице, то получится в точности определение 2.

Хроматические числа графов изучались ещё, по крайней мере, полтора века назад, но точное происхождение термина проследить сейчас сложно. Поначалу ими занимались в связи с *проблемой пяти красок*, а впоследствии — *проблемой четырёх красок* (см., например, [7]). Именно когда Э. Нельсон размышлял над проблемой четырёх красок, ему пришла идея рассмотреть проблему хроматического числа плоскости. Это было в 1950 году, и тогда же он показал, что это хроматическое число не меньше четырёх, а Д. Исбеллу, с которым он обсуждал эту проблему, удалось показать, что оно не превосходит семи. Эти результаты, однако, ими опубликованы не были. Подробное исследование истории этого вопроса с письмами и свидетельствами участников обсуждения проделано А. Сойфером в его книге [1].

Также достаточно легко видеть, что хроматическое число прямой  $\mathbb{R}$  равно двум ( $\chi(\mathbb{R}) = 2$ ). Действительно, достаточно для всех целых  $z$  раскрасить

интервалы вида  $[2z, 2z + 1)$  в белый цвет, а интервалы вида  $[2z + 1, 2z + 2)$  — в чёрный. Как это ни удивительно, оценки для хроматического числа плоскости так и не были улучшены со времени формулировки проблемы, и таким образом,

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Для доказательства нижних оценок  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  чаще всего прибегают к построению конечных графов, вершинами которых являются точки пространства, а рёбрами — точки, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Очевидно, что если хроматическое число такого графа равно  $X$ , то хроматическое число соответствующего евклидова пространства не меньше  $X$ . Действительно, в противном случае все точки пространства  $\mathbb{R}^n$ , а в частности, точки, соответствующие вершинам графа, можно было бы покрасить в  $X - 1$  цвет. Никакие из них, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга (то есть, соединённые ребром), не покрашены в один цвет, а значит, хроматическое число графа не превосходило бы  $X - 1$ . В результате, такие графы очень удобны для получения нижних оценок хроматического числа. Они называются «геометрическими».

**Определение 4.** *Геометрическим графом называется такое расположение графа  $(V, E)$  в евклидовом пространстве, что множество его вершин является подмножеством точек евклидова пространства  $(V \subset \mathbb{R}^n)$ , а рёбра представлены отрезками, соединяющими соответствующие вершины.*

Нас будет интересовать более конкретный класс геометрических графов. А именно, речь пойдёт о *графах единичных расстояний* и *графах расстояний с  $t$  запрещёнными расстояниями*.

**Определение 5.** *Графом единичных расстояний называется такой геометрический граф  $G = (V, E)$ , что если две его вершины  $v_1, v_2 \in V$  соединены ребром  $\{v_1, v_2\} \in E$ , то расстояние между этими вершинами равно единице ( $|v_1 - v_2| = 1$ ).*

В качестве простейшего примера приведём использование так называемого «Мозеровского веретена»<sup>3</sup> для доказательства того, что  $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ .

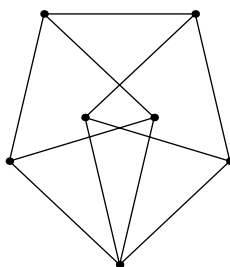


Рисунок 1.1: Мозеровское веретено

Расстояние между всеми парами вершин, соединёнными рёбрами на рисунке 1.1, равно единице. Хроматическое число этого графа равно четырём, так как мы не можем покрасить его вершины в не более чем три цвета так, чтобы вершины, соединённые ребром были покрашены в разные цвета. Это означает, что и всю плоскость нельзя покрасить в три цвета, поскольку мы не сможем покрасить уже семь конкретных её точек.

На этом примере видно, что наличие треугольников упрощает построение графа с большим хроматическим числом, потому что, как минимум, все вершины, входящие в треугольник, должны быть покрашены в разные цвета. Кроме того, в 1959 году П. Эрдёш (см. [9]) доказал красивый и довольно неожиданный факт.

**Теорема 1** (Эрдёш, 1959). Пусть  $k \geq 2$ ,  $l \geq 2$  — произвольные натуральные числа. Тогда существует граф, у которого хроматическое число больше  $k$ , а длина минимального простого цикла больше  $l$ .

Иными словами, бывают графы  $G$  со сколь угодно большим хроматическим числом  $\chi(G)$  и обхватом  $g(G)$  (длиной кратчайшего цикла).

Это соображение привело П. Эрдёша к вопросу, возможно ли построение графа, подобного Мозеровскому веретену, то есть такого графа единичных расстояний на плоскости, чтобы с одной стороны его хроматическое число равнялось четырём, а с другой — чтобы он не содержал треугольников. Он

<sup>3</sup>Граф назван так в честь братьев Л. и В. Мозеров, которые использовали его в своей работе [8]. В этой статье они показывают, что это минимальный (в плане количества вершин) пример графа единичных расстояний на плоскости с хроматическим числом четыре.

задал этот вопрос в 1976 году в [2], а затем поставил более общий вопрос про существование графа расстояний  $G$  с  $\chi(G) = 4$  и  $g(G) \geq k$  для любого наперед заданного  $k$ . Надо сказать, что сам П. Эрдёш не ожидал, что у задачи будет положительное решение.

Уже в 1979 году Н. Уормалд (см. [3]) показал, что существует граф с обхватом пять и с хроматическим числом четыре. Позднее, в 1999 году в своей кандидатской диссертации (а также в опубликованных на год позже статьях [10] и [11]) П. О’Доннелл показал, что для любого наперёд заданного числа  $k$  существует граф единичных расстояний с обхватом  $k$  и хроматическим числом четыре.

Смежной задачей можно считать нахождение графов с хроматическим числом четыре и обхватом  $k$  на как можно меньшем количестве вершин (а в идеале — нахождение минимального числа вершин). Эта задача не относится напрямую к теме данной диссертации, но здесь будет использован один из графов, который был получен в результате решения этой задачи. В [4] П. О’Доннеллу и Р. Хохбергу удалось построить пример графа без треугольников на 23 вершинах<sup>4</sup>, который приведён на рисунке 1.2.

Модификация этого графа пригодится нам при построении графа без треугольников в трёхмерном пространстве.

В данной диссертации рассматривается обобщение задачи, поставленной П. Эрдёшем, на случай многомерных пространств. А именно, исследуется следующая задача.

**Задача 1.** *В  $n$ -мерном евклидовом пространстве построить граф с как можно большим хроматическим числом (в идеале — равном хроматическому числу этого пространства) без клик как можно меньшего размера.*

На самом деле, эту задачу можно подразделить на две задачи: построение примеров в пространствах малой размерности и исследование асимптотики хроматического числа при росте размерности  $n$  пространства.

В дальнейшем нам потребуется определение *кликового числа*.

**Определение 6.** *Кликовым числом графа  $G = (V, E)$  называется размер максимальной клики в этом графе, то есть максимальная мощность*

---

<sup>4</sup>А также граф с обхватом пять на 40 вершинах.

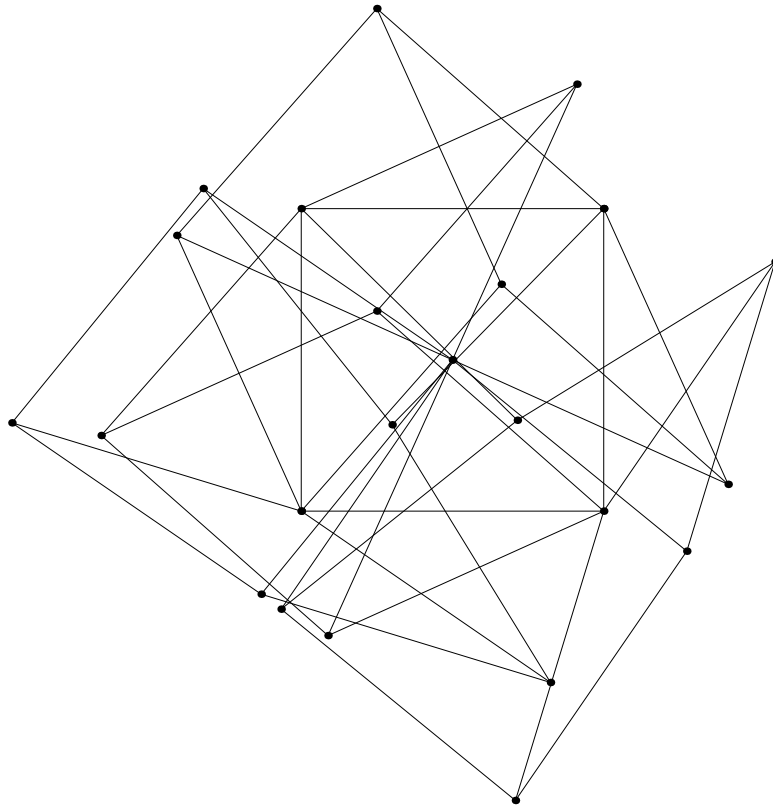


Рисунок 1.2: Граф  $G$  без треугольников с  $\chi(G) = 4$

подмножества  $V$ , все вершины которого соединены друг с другом ребром. Обозначается кликовое число  $\omega(G)$ .

Таким образом, задачу **1** можно понимать как задачу максимизации  $\chi(G)$  и минимизации  $\omega(G)$ . Поскольку оптимизационная задача двухкритериальная, то она, скорее всего, не имеет одного решения. Для решения её мы будем фиксировать  $\omega(G)$  и для каждого фиксированного значения  $\omega(G)$  искать граф с максимальным  $\chi(G)$ .

Чтобы понять, каких хроматических чисел можно ожидать в лучшем случае при ответе на этот вопрос, стоит обратиться к лучшим известным на сегодняшний день оценкам хроматического числа для пространств разной размерности.

- $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$ . Этот результат очевиден и уже был обсуждён во Введении.
- $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ . Оба результата довольно простые. Доказательства их можно найти в работах [8], [12] и в брошюре [13]. Заметим, в частности, что каждый из приведённых выше на рисунках 1.1 и 1.2 графов также является доказательством нижней оценки.

- $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$ . Нижняя оценка принадлежит О. Нечуштану (см. [5]), а верхняя — Д. Кулсону (см. [14]).
- $7 \leq \chi(\mathbb{R}^4) \leq 54$ . Нижняя оценка принадлежит К. Кантвеллу (см. [15]) и Л.Л. Иванову (см. [16]), а верхняя — Г. Тоту и Р. Радойчичу (см. [17]).
- $(1.239\dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$ . Нижняя оценка принадлежит А.М. Райгородскому (см. [6]), а верхняя — Д. Ларману и К.А. Роджерсу (см. [18]). Заметим, что приведенная нижняя оценка является модификацией первоначальной экспоненциальной оценки П. Франкла и Р.М. Уилсона, имевшей вид  $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207\dots + o(1))^n$  (см. [19]).

Таким образом, мы видим, что с ростом размерности хроматическое число пространства растет экспоненциально.

Нас интересуют обобщения задачи П. Эрдёша на случай размерности  $n \geq 3$ . Разумеется, здесь речь идет о построении графов с хроматическим числом, максимально близким к наибольшему из известных. Так, в размерности три имеет смысл говорить о хроматическом числе пять или шесть. В растущей размерности правильным аналогом четверки служит экспонента.

Ранее мы ввели определение *графа единичных расстояний*, который изначально рассматривался в связи с задачей хроматического числа плоскости. Аналогичным образом можно рассмотреть задачу хроматического пространства с несколькими запрещёнными расстояниями. Обобщать эту задачу можно несколькими способами. Действительно, в случае с одним запрещённым расстоянием было не важно, запрещать расстояние 1 или некоторое другое расстояние  $d \neq 1$ . Если же мы запретим, скажем, два расстояния, то хроматическое число может различаться в зависимости от соотношения между запрещёнными расстояниями. Эта же проблема с определением переносится и на графы расстояний с несколькими запрещёнными расстояниями, которые мы определяем ниже.

**Определение 7.** *Графом с  $t$  запрещёнными расстояниями называется геометрический граф  $G = (V, E)$ , для которого существует такое множество  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+$  из  $t$  элементов, что если  $\{v_1, v_2\} \in E$ , то  $|v_1 - v_2| \in \mathcal{A}$ .*

**Определение 8.** *Хроматическим числом евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  с множеством запретов  $\mathcal{A}$  (обозначается  $\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ ) называется минимальное такое число  $k$ , что множество точек  $\mathbb{R}^n$  можно представить в виде объединения  $k$  непересекающихся подмножеств  $\mathbb{R}^n = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_k$  так, что любые две точки, расположенные на расстоянии  $d \in \mathcal{A}$  друг от друга, не лежат в одном и том же множестве  $V_i$ .*

Как уже было сказано, даже если мы знаем размер  $\mathcal{A}$  и даже если он равен двум, хроматические числа  $\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$  могут быть достаточно разными. Мы рассмотрим задачу о наибольшем хроматическом числе для данного количества запретов:

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m) = \max_{\mathcal{A}, |\mathcal{A}|=m} \chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}).$$

Величину  $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m)$  рассматривал еще П. Эрдёш, который знал, например, что

$$c_1 m \sqrt{\ln m} \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^2; m) \leq c_2 m^2, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Подобные результаты описаны в обзоре [20].

Аккуратно подсчитанные нижние оценки для хроматических чисел  $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m)$ , коль скоро  $n \rightarrow \infty$ , впервые были приведены в статье [21]. Там было доказано, что

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \geq (1.239\dots + o(1))^n, \quad \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 2) \geq (1.439\dots + o(1))^n.$$

Кроме того, там была установлена общая нижняя оценка, справедливая даже в случае любой функции  $m = m(n)$ :

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m) \geq (c_1 m)^{c_2 n}, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Константы  $c_1, c_2$  были чрезвычайно маленькими (порядка  $2^{-10000}$ ), поэтому позже указанный результат уточнялся (см. [22]). А в работах [23] и [24] была развита оптимизационная техника, позволившая найти оптимальные (в рамках некоторого метода) константы типа 1.239 и 1.439. Перечислим эти результаты:

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 2) \geq (1.465\dots + o(1))^n,$$



$$\begin{aligned}
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 3) &\geq (1.667\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 4) &\geq (1.848\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 5) &\geq (2.013\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 6) &\geq (2.165\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 7) &\geq (2.308\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 8) &\geq (2.442\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 9) &\geq (2.570\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 10) &\geq (2.691\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 11) &\geq (2.807\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 12) &\geq (2.919\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 13) &\geq (3.026\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 14) &\geq (3.130\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 15) &\geq (3.231\dots + o(1))^n, \\
\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 16) &\geq (3.328\dots + o(1))^n.
\end{aligned}$$

Список можно продолжать и дальше.

Что касается верхних оценок величин  $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m)$ , то ничего лучшего не придумано, нежели оценка

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; m) \leq (3 + o(1))^{nm},$$

мгновенно вытекающая из неравенства  $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \leq (3 + o(1))^n$ , которое мы уже цитировали выше. Понятно, что с ростом  $m$  эта оценка катастрофически удаляется от имеющихся нижних оценок. Впрочем, по-видимому, именно верхние оценки подлежат дальнейшему усилению.

Как и в предшествующей части работы, нас будут интересовать графы расстояний с ограниченным кликовым числом. При этом теперь наши графы расстояний — это подграфы в графах  $\mathfrak{G} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E}_{\mathcal{A}})$ , у которых

$$\mathfrak{V} = \mathbb{R}^n, \mathfrak{E}_{\mathcal{A}} = \{\{x, y\} : |x - y| \in \mathcal{A}\}.$$

Основным объектом нашего исследования в задаче с несколькими запрещёнными расстояниями будет величина

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) = \sup\{\zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \\ \text{и } \forall n \exists A \text{ мощности } m \text{ и } \exists G \text{ в } \mathfrak{G}_A, \text{ у которого } \omega(G) < k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\}.$$

## 1.2 Нижние оценки хроматических чисел трёхмерных графов расстояний с запретами на клики

В главе 2 мы приведём примеры таких двух графов единичных расстояний с хроматическим числом пять в трёхмерном пространстве, что в первом примере граф не содержит тетраэдров, а во втором — треугольников. А именно, мы докажем следующие теоремы.

**Теорема 2.** *В пространстве  $\mathbb{R}^3$  существует граф расстояний, имеющий хроматическое число пять и не содержащий тетраэдров.*

**Теорема 3.** *В пространстве  $\mathbb{R}^3$  существует граф расстояний без треугольников (циклов длины три) и с хроматическим числом пять.*

Результат теоремы 2 был опубликован в нашей статье [32].

Также при обсуждении техники, использованной для построения примера графа в доказательстве теоремы 3, будет показано, как подобная техника может быть использована и при построении примеров графов без треугольников (или циклов большего размера) в других пространствах. А именно, для некоторого класса графов с помощью такой техники можно повысить размерность пространства и хроматическое число на единицу, сохранив свойство отсутствия треугольников (или циклов большей длины).

## 1.3 Нижние оценки хроматических чисел графов расстояний с запретами на клики в растущей размерности

### 1.3.1 Результаты с одним запрещённым расстоянием

Для удобства формулировки результатов в этой части диссертации мы введём обозначения  $\zeta_{\text{clique}}(k)$ :

$$\zeta_{\text{clique}}(k) = \sup \left\{ \zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n), \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right. \\ \left. \text{и } \forall n \exists G \text{ в } \mathbb{R}^n, \text{ у которого } \omega(G) < k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n \right\}.$$

Разумеется, для некоторых  $k$  эти величины могут оказаться меньше единицы, и тогда смысла в их рассмотрении нет. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы доказать неравенства  $\zeta_{\text{clique}}(k) > 1$  для всех  $k$  и, более того, найти оптимальные значения в правых частях этих неравенств.

Как уже было сказано, без запрета на клики лучшая известная нижняя оценка хроматического числа — это  $(1.239\dots + o(1))^n$ , поэтому можно ожидать, что  $1 \leq \zeta_{\text{clique}}(k) \leq 1.239\dots$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\text{clique}}(k) = 1.239\dots$

В нашей совместной работе [33] Е. Е. Демёхин доказал следующую теорему.

**Теорема 4** (Е.Е. Демёхин). *Имеет место оценка*

$$\zeta_{\text{clique}}(3) \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = 1.058\dots$$

В той же работе он получил и оценку на  $\zeta_{\text{clique}}(k)$  для произвольного  $k$  с помощью границ равновесных кодов.

**Теорема 5** (Е.Е. Демёхин). *Пусть дано натуральное число  $k \geq 3$ . Пусть, далее,  $a$  и  $b$  — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие ограничениям*

$$a \in (0, 1), \quad b \in (0, 1), \quad b > 2a, \quad b^2 > a, \quad \left\lceil \frac{b-a}{b^2-a} \right\rceil < k.$$

Тогда

$$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \frac{(b-a)^{b-a}(1-b+a)^{1-b+a}}{b^b(1-b)^{1-b}}.$$

В серии работ [33], [34], [35], [36] нами получена нижняя оценка величины  $\zeta_{\text{clique}}(k)$ , которая при больших  $k$  работает лучше оценки из теоремы 5.

Общая идея подхода состоит в том, чтобы взять графы, у каждого из которых изначально есть клики сколь угодно большого размера, а потом удалить часть ребер из этих графов, уничтожив в них все клики данной величины, и выбрать из множества рассмотренных графов оптимальный. Наиболее эффективным окажется здесь вероятностный метод (см. [25], [26], [27]).

А именно, в главе 3 мы доказываем теоремы, дающие общий рецепт получения «оптимальных» оценок для величин  $\zeta_{\text{clique}}(k)$ .

**Теорема 6.** Пусть  $k \geq 5$  — произвольное натуральное число, а  $b_0 \in (0, \frac{1}{2})$  — произвольное вещественное число. Положим

$$\begin{aligned} \tau_0 = \tau_0(b_0) &= \left(\frac{b_0}{2}\right)^{-\frac{b_0}{2}} \left(1 - \frac{b_0}{2}\right)^{-(1-\frac{b_0}{2})}, \\ \tau_1 = \tau_1(b_0) &= b_0^{-b_0}(1-b_0)^{-(1-b_0)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(b_0, k) = \left\{ c' \in [\tau_0, \tau_1] : k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c' - \ln \tau_0} \right\rceil \right\}.$$

Положим  $c = c(b_0, k) = \inf \mathcal{C}$ , если  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , и  $c = \tau_1$  иначе. Тогда  $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \frac{\tau_1}{c}$ .

**Теорема 7.** Пусть  $k \geq 5$  — произвольное натуральное число, а  $b_{-1}, b_1$  — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие ограничениям

$$b_{-1}, b_1 \in (0, 1), \quad b_{-1} + b_1 \leq \frac{1}{2}, \quad b_{-1} \leq b_1.$$

Положим

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 + 9b_{-1} + 3b_1 - \sqrt{(2 + 9b_{-1} + 3b_1)^2 - 12(3b_{-1} + b_1)^2}}{12}, \\ B &= \frac{3b_{-1} + b_1}{2} - 2A, \quad C = 1 + A - \frac{3b_{-1} + b_1}{2}. \end{aligned}$$

Пусть, далее,

$$\rho_0 = \rho_0(b_{-1}, b_1) = A^{-A} B^{-B} C^{-C},$$

$$\rho_1 = \rho_1(b_{-1}, b_1) = b_{-1}^{-b_{-1}} b_1^{-b_1} (1 - b_{-1} - b_1)^{-(1-b_{-1}-b_1)}.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(b_{-1}, b_1, k) = \left\{ c' \in [\rho_0, \rho_1] : k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \rho_1}{\ln c' - \ln \rho_0} \right\rceil \right\}.$$

Положим  $c = c(b_{-1}, b_1, k) = \inf \mathcal{C}$ , если  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , и  $c = \rho_1$  иначе. Тогда  $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \frac{\rho_1}{c}$ .

Нетрудно проверить, что в условиях теоремы 6 величина  $\tau_0$  всегда меньше величины  $\tau_1$ , а потому множество  $\mathcal{C}$  определено корректно. В конечном счете имеем

$$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \max_{b_0 \in (0, \frac{1}{2})} \frac{\tau_1(b_0)}{c(b_0, k)}.$$

Аналогичный комментарий верен и относительно теоремы 7. Правда, там не столь очевидно неравенство  $\rho_0 < \rho_1$ ; доказательство этого неравенства можно найти в [28]. В итоге

$$\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \max_{b_{-1}, b_1} \frac{\rho_1(b_{-1}, b_1)}{c(b_{-1}, b_1, k)}.$$

### 1.3.2 Сравнение оценок $\zeta_{\text{clique}}(k)$ в теоремах 4, 5, 6 и 7

Мы собрали оптимальные результаты в таблицах 1.1 и 1.2, которые мы приводим ниже. В таблице 1.1 в первом столбце указано  $k$ , во втором и третьем —  $b_{-1}, b_1$  (параметры из теоремы 7), в четвертом — наилучшая оценка в теореме 7. В таблице 1.2 в первом столбце указано  $k$ , во втором столбце указано  $b_0$  (параметр из теоремы 6), в третьем — наилучшая оценка в теореме 6, в четвертом для сравнения ещё раз приведена наилучшая оценка в теореме 7, в пятом — лучшая из оценок теорем 6 и 7; при этом в третьем и четвертом столбцах таблицы 1.2 жирным шрифтом выделена та оценка, которая попала в пятый столбец. Все оценки даны с восемью точными знаками после запятой.

$k$	$b_{-1}$	$b_1$	$\zeta(k) \geq$
5	0.00001734	0.02544379	1.00280720

6	0.00071800	0.08438940	1.01694361
7	0.00270696	0.12703569	1.03395854
8	0.00553133	0.15711445	1.05011426
9	0.00869977	0.17904575	1.06460594
10	0.01190629	0.19555639	1.07739346
11	0.01498920	0.20833110	1.08864080
12	0.01787410	0.21844807	1.09855184
13	0.02053497	0.22662152	1.10731983
14	0.02297102	0.23333932	1.11511348
15	0.02519380	0.23894375	1.12207552
16	0.02722013	0.24368069	1.12832523
17	0.02906839	0.24773059	1.13396195
18	0.03075664	0.25122837	1.13906849
19	0.03230179	0.25427658	1.14371408
20	0.03371912	0.25695447	1.14795689
25	0.03931602	0.26656957	1.16461196
30	0.04321023	0.27249456	1.17618197
35	0.04605883	0.27649512	1.18467380
40	0.04822699	0.27937171	1.19116666
45	0.04992995	0.28153709	1.19628994
50	0.05130175	0.28322476	1.20043462
55	0.05242980	0.28457649	1.20385612
100	0.05755871	0.29034354	1.21959032
1000	0.06326998	0.29611686	1.23753236
10000	0.06384354	0.29666283	1.23936294
100000	0.06390091	0.29671712	1.23954636

Таблица 1.1: Результаты в теореме 7

$k$	Теорема 6		Теорема 7	Максимум
	$b_0$	$\zeta(k) \geq$	$\zeta(k) \geq$	$\zeta(k) \geq$
5	0.02825291	<b>1.00297305</b>	1.00280720	1.00297305
6	0.09659179	<b>1.01838640</b>	1.01694361	1.01838640
7	0.14157882	<b>1.03626539</b>	1.03395854	1.03626539
8	0.17051644	<b>1.05242870</b>	1.05011426	1.05242870
9	0.19035277	<b>1.06632451</b>	1.06460594	1.06632451
10	0.20472195	<b>1.07816823</b>	1.07739346	1.07816823
11	0.21558694	1.08829570	<b>1.08864080</b>	1.08864080
12	0.22408139	1.09701591	<b>1.09855184</b>	1.09855184
13	0.23090096	1.10458387	<b>1.10731983</b>	1.10731983
14	0.23649470	1.11120346	<b>1.11511348</b>	1.11511348
15	0.24116490	1.11703654	<b>1.12207552</b>	1.12207552
16	0.24512232	1.12221184	<b>1.12832523</b>	1.12832523
17	0.24851823	1.12683247	<b>1.13396195</b>	1.13396195
18	0.25146404	1.13098160	<b>1.13906849</b>	1.13906849
19	0.25404355	1.13472693	<b>1.14371408</b>	1.14371408
20	0.25632099	1.13812400	<b>1.14795689</b>	1.14795689
25	0.26461281	1.15125524	<b>1.16461196</b>	1.16461196
30	0.26984084	1.16020045	<b>1.17618197</b>	1.17618197
35	0.27343793	1.16668123	<b>1.18467380</b>	1.18467380
40	0.27606415	1.17159101	<b>1.19116666</b>	1.19116666
45	0.27806578	1.17543859	<b>1.19628994</b>	1.19628994
50	0.27964192	1.17853468	<b>1.20043462</b>	1.20043462
55	0.28091520	1.18107971	<b>1.20385612</b>	1.20385612
100	0.28647009	1.19266305	<b>1.21959032</b>	1.21959032
1000	0.29226811	1.20564840	<b>1.23753236</b>	1.23753236
10000	0.29283085	1.20696080	<b>1.23936294</b>	1.23936294
100000	0.29288697	1.20709218	<b>1.23954636</b>	1.23954636

Таблица 1.2: Результаты в теореме 6 и сравнение с теоремой 7

Видно, что теорема 6 сильнее теоремы 7 лишь при  $k \leq 10$ . Далее, число в третьей колонке таблицы 1.2, очевидно, стремится к 1.207..., а число в четвертой колонке становится все ближе к 1.239... Это и суть константы из работ [19] и [6], в которых получены самые сильные из известных нижние оценки для  $\chi(\mathbb{R}^n)$  (см. раздел 1.1). Таким образом, в асимптотике по  $k$  наши теоремы 6 и 7 дают очень сильные результаты.

Результат теоремы 5 Е.Е. Демёхина в указанном смысле слабее. Оценки в теореме 5 не стремятся ни к 1.207..., ни к 1.239.... Их пределом является величина (см. [33])

$$1.139\dots = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3/4}.$$

В то же время при малых  $k$  теорема 5 всё-таки лучше. А именно, она сильнее теорем 6 и 7 при всех  $k \leq 13$ .

Заметим, наконец, что теоремы 6 и 7, по существу, не применимы к  $k \leq 4$ . Таким образом, в этой области подход теоремы 4 становится незаменим.

### 1.3.3 Результаты с несколькими запрещёнными расстояниями

Как и в пункте 1.3.1, нас будут интересовать графы расстояний с ограниченным кликовым числом. При этом теперь наши графы расстояний — это подграфы в графах  $\mathfrak{G}_{\mathcal{A}} = (\mathfrak{V}, \mathfrak{E}_{\mathcal{A}})$ , у которых

$$\mathfrak{V} = \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{E}_{\mathcal{A}} = \{\{x, y\} : |x - y| \in \mathcal{A}\}.$$

Основным объектом нашего исследования будет величина

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) = \sup \left\{ \zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n), \text{ такая, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0 \right.$$

$$\left. \text{и } \forall n \exists \mathcal{A} \text{ мощности } m \text{ и } \exists G \text{ в } \mathfrak{G}_{\mathcal{A}}, \right.$$

$$\left. \text{у которого } \omega(G) < k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n \right\}.$$

Разумеется,  $\zeta_{\text{clique}}(k, 1) = \zeta_{\text{clique}}(k)$ , так что тут мы сконцентрируемся на случаях  $m \geq 2$ .

В [33] нам удалось доказать следующую теорему.



**Теорема 8.** Пусть даны числа  $k$  и  $m$ . Пусть также  $r \geq 1$  – произвольное натуральное число. Рассмотрим симплекс

$$\Delta = \{\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_r) : v_i \in [0, 1], v_0 + v_1 + \dots + v_r = 1\}.$$

Для каждого  $\mathbf{v} \in \Delta$  положим

$$g(t) = g(t, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^r \mathbb{I}_{\{t \geq \sum_{j=0}^i v_j\}}(t), \quad \bar{s}' = \bar{s}'(\mathbf{v}) = \int_0^1 g^2(t) dt,$$

$$\underline{s}' = \underline{s}'(\mathbf{v}) = \int_0^1 g(t)g(1-t) dt,$$

$$\mathbf{b} = (0, 1, \dots, r), \quad \mathbf{e} = (1, \dots, 1),$$

$$H' = H'(\mathbf{v}) = \left\{ \boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \dots, \eta_r) : \eta_i \in [0, 1], (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{e}) = 1, (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{b}) \leq \frac{\bar{s}' - \underline{s}'}{m+1} \right\},$$

$$f(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^r a_i \ln a_i, \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_r),$$

$$\rho(\mathbf{v}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v}).$$

Тогда

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq e^{\rho(\mathbf{v})}.$$

Следствием из теоремы является утверждение о том, что

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq \max_{r \geq 1} \max_{\mathbf{v} \in \Delta} e^{\rho(\mathbf{v})}.$$

Теорему 8 мы докажем в разделе 3.3.

### 1.3.4 Таблицы результатов теоремы 8

В таблицах 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 и 1.7, которые мы приводим ниже, отражены  $m$  от 1 до 20. Для каждого  $m$  величина  $k$  меняется в пределах 1 – 20, 25, 50, .... Мы также указываем значение  $r \leq 15$ , вплоть до которого приходилось искать максимумы для данных  $m$  и  $k$ . Видно, что при  $m \leq 11$  и при  $k \rightarrow \infty$  величина искомой константы стремится ровно к той величине, полученной в [24], которая для данного  $m$  выписана в разделе 1.1. При  $m > 11$  начинаются небольшие расхождения, связанные с тем, что мы не брали

$r > 15$ . Последнее обстоятельство обусловлено, в свою очередь, нехваткой мощности персонального компьютера. Если написать программу, делающую распределенные вычисления, и запустить ее на кластере, то можно будет брать  $r$  порядка 20, а это и есть та величина, которую использовали авторы работы [24].

Стоит отметить, что есть три клетки в первой таблице, где стоит точная единица. Это соответствует тому, что наш метод дает экспоненциальные оценки хроматического числа не при всех  $k$ .

$k \setminus m$	1	$r$	2	$r$	3	$r$	4	$r$
3	1.000000	0	1.000000	0	1.001271	1	1.010972	1
4	1.000000	0	1.016665	1	1.055782	2	1.096186	3
5	1.002973	1	1.058718	2	1.122702	3	1.182135	4
6	1.018386	1	1.099706	2	1.180723	3	1.254357	5
7	1.036265	1	1.134785	2	1.229070	4	1.313893	5
8	1.052429	1	1.164501	3	1.269349	4	1.363230	6
9	1.066325	1	1.189781	3	1.303175	4	1.404563	6
10	1.078168	1	1.211347	3	1.331877	4	1.439591	6
11	1.088641	2	1.229900	3	1.356502	5	1.469605	6
12	1.098552	2	1.245997	3	1.377831	5	1.495581	6
13	1.107320	2	1.260076	3	1.396467	5	1.518267	6
14	1.115113	2	1.272482	3	1.412880	5	1.538243	7
15	1.122076	2	1.283491	3	1.427439	5	1.555959	7
16	1.128325	2	1.293319	3	1.440437	5	1.571776	7
17	1.133962	2	1.302145	3	1.452111	5	1.585980	7
18	1.139068	2	1.310113	3	1.462651	5	1.598803	7
19	1.143714	2	1.317370	4	1.472213	5	1.610438	7
20	1.147957	2	1.324001	4	1.480927	5	1.621040	7
25	1.164612	2	1.349947	4	1.514987	5	1.662487	7
50	1.200435	2	1.405522	4	1.587854	6	1.751161	8
100	1.219590	2	1.435237	4	1.626797	6	1.798568	8
1000	1.237532	2	1.463131	4	1.663355	6	1.843092	8
10000	1.239363	2	1.465982	4	1.667092	6	1.847644	8
100000	1.239546	2	1.466267	4	1.667467	6	1.848100	8
1000000	1.239565	2	1.466296	4	1.667504	6	1.848146	8
10000000	1.239567	2	1.466299	4	1.667508	6	1.848150	8
100000000	1.239567	2	1.466299	4	1.667508	6	1.848151	8
1000000000	1.239567	2	1.466299	4	1.667508	6	1.848151	8

Таблица 1.3: Оценки  $\zeta_{\text{clique}}(k, m)$  для  $m$  от 1 до 4

$k \setminus m$	5	$r$	6	$r$	7	$r$	8	$r$
3	1.025130	2	1.040369	3	1.055470	3	1.070035	4
4	1.134188	4	1.169410	5	1.202065	6	1.232460	7
5	1.236366	5	1.286031	6	1.331837	8	1.374384	9
6	1.321082	6	1.382065	7	1.438305	9	1.490586	10
7	1.390598	7	1.460707	8	1.525420	9	1.585647	13
8	1.448099	7	1.525716	8	1.597430	10	1.664250	11
9	1.496227	7	1.580123	9	1.657711	10	1.730074	15
10	1.536999	8	1.626218	9	1.708798	11	1.785883	12
11	1.571930	8	1.665716	9	1.752588	11	1.833738	12
12	1.602161	8	1.699908	10	1.790506	11	1.875191	14
13	1.628566	8	1.729777	10	1.823641	11	1.911426	13
14	1.651816	8	1.756084	10	1.852831	12	1.943357	15
15	1.672439	8	1.779423	10	1.878734	12	1.971699	13
16	1.690852	8	1.800265	10	1.901871	12	1.997020	14
17	1.707389	9	1.818987	10	1.922659	12	2.019774	14
18	1.722321	9	1.835895	10	1.941435	12	2.040331	14
19	1.735870	9	1.851238	10	1.958477	12	2.058992	14
20	1.748218	9	1.865223	10	1.974013	12	2.076007	14
25	1.796502	9	1.919929	11	2.034806	13	2.142609	14
50	1.899879	9	2.037156	11	2.165195	13	2.285587	15
100	1.955191	10	2.099939	12	2.235094	13	2.362305	15
1000	2.007171	10	2.158976	12	2.300865	14	2.434538	15
10000	2.012487	10	2.165016	12	2.307597	14	2.441933	15
100000	2.013020	10	2.165622	12	2.308271	14	2.442675	15
1000000	2.013073	10	2.165682	12	2.308339	14	2.442749	15
10000000	2.013079	10	2.165688	12	2.308346	14	2.442756	15
100000000	2.013079	10	2.165689	12	2.308346	14	2.442757	15
1000000000	2.013079	10	2.165689	12	2.308346	14	2.442757	15

Таблица 1.4: Оценки  $\zeta_{\text{clique}}(k, m)$  для  $m$  от 5 до 8

$k \setminus m$	9	$r$	10	$r$	11	$r$	12	$r$
3	1.083948	5	1.097196	5	1.109804	6	1.121815	7
4	1.260886	8	1.287592	15	1.312789	11	1.336654	15
5	1.414155	15	1.451537	14	1.486840	13	1.520320	15
6	1.539514	13	1.585569	15	1.629130	15	1.670504	15
7	1.642088	13	1.695284	15	1.745668	14	1.793585	14
8	1.726939	15	1.786094	14	1.842183	15	1.895584	15
9	1.798033	14	1.862220	14	1.923136	15	1.981183	15
10	1.858336	14	1.926823	15	1.991869	15	2.053896	15
11	1.910066	14	1.982264	15	2.050879	15	2.116349	15
12	1.954893	14	2.030325	15	2.102051	15	2.170525	15
13	1.994088	15	2.072362	15	2.146824	15	2.217941	15
14	2.028638	15	2.109426	15	2.186312	15	2.259771	15
15	2.059313	15	2.142341	15	2.221388	15	2.296935	15
16	2.086724	15	2.171761	15	2.252745	15	2.330167	15
17	2.111361	15	2.198210	15	2.280941	15	2.360054	15
18	2.133624	15	2.222112	15	2.306427	15	2.387072	15
19	2.153836	15	2.243818	15	2.329573	15	2.411615	15
20	2.172268	15	2.263614	15	2.350687	15	2.434004	15
25	2.244444	15	2.341157	15	2.433418	15	2.521763	15
50	2.399520	15	2.507905	15	2.611462	15	2.710767	15
100	2.482803	15	2.597533	15	2.707238	15	2.812516	15
1000	2.561264	15	2.682017	15	2.797565	15	2.908524	15
10000	2.569299	15	2.690671	15	2.806820	15	2.918364	15
100000	2.570104	15	2.691539	15	2.807748	15	2.919351	15
1000000	2.570185	15	2.691626	15	2.807841	15	2.919450	15
10000000	2.570193	15	2.691634	15	2.807850	15	2.919459	15
100000000	2.570194	15	2.691635	15	2.807851	15	2.919460	15
1000000000	2.570194	15	2.691635	15	2.807851	15	2.919461	15

Таблица 1.5: Оценки  $\zeta_{\text{clique}}(k, m)$  для  $m$  от 9 до 12

$k \setminus m$	13	$r$	14	$r$	15	$r$	16	$r$
3	1.133272	7	1.144220	14	1.154699	10	1.164748	13
4	1.359334	14	1.380954	14	1.401621	11	1.421424	15
5	1.552185	15	1.582609	15	1.611740	14	1.639702	14
6	1.709944	14	1.747658	15	1.783823	15	1.818587	15
7	1.839321	15	1.883109	15	1.925148	15	1.965605	15
8	1.946605	15	1.995502	15	2.042490	15	2.087750	15
9	2.036690	15	2.089929	15	2.141126	15	2.190477	15
10	2.113249	15	2.170213	15	2.225028	15	2.277895	15
11	2.179032	15	2.239224	15	2.297174	15	2.353094	15
12	2.236116	15	2.299129	15	2.359822	15	2.418411	15
13	2.286091	15	2.351589	15	2.414698	15	2.475640	15
14	2.330190	15	2.397892	15	2.463144	15	2.526176	15
15	2.369380	15	2.439049	15	2.506216	15	2.571114	15
16	2.404429	15	2.475864	15	2.544751	15	2.611326	15
17	2.435956	15	2.508985	15	2.579425	15	2.647514	15
18	2.464462	15	2.538937	15	2.610785	15	2.680249	15
19	2.490359	15	2.566152	15	2.639283	15	2.709999	15
20	2.513987	15	2.590985	15	2.665291	15	2.737153	15
25	2.606628	15	2.688378	15	2.767316	15	2.843701	15
50	2.806291	15	2.898425	15	2.987496	15	3.073782	15
100	2.913856	15	3.011661	15	3.106272	15	3.197975	15
1000	3.015398	15	3.118605	15	3.218494	15	3.315362	15
10000	3.025809	15	3.129572	15	3.230004	15	3.327404	15
100000	3.026852	15	3.130671	15	3.231158	15	3.328611	15
1000000	3.026957	15	3.130781	15	3.231274	15	3.328732	15
10000000	3.026967	15	3.130792	15	3.231285	15	3.328744	15
100000000	3.026968	15	3.130793	15	3.231287	15	3.328745	15
1000000000	3.026968	15	3.130793	15	3.231287	15	3.328745	15

Таблица 1.6: Оценки  $\zeta_{\text{clique}}(k, m)$  для  $m$  от 13 до 16

$k \setminus m$	17	$r$	18	$r$	19	$r$	20	$r$
3	1.174400	15	1.183687	14	1.192635	15	1.201269	15
4	1.440444	15	1.458746	15	1.476392	15	1.493432	15
5	1.666601	15	1.692530	15	1.717569	15	1.741789	15
6	1.852077	15	1.884404	15	1.915663	15	1.945937	15
7	2.004623	15	2.042324	15	2.078817	15	2.114196	15
8	2.131437	15	2.173685	15	2.214612	15	2.254318	15
9	2.238145	15	2.284273	15	2.328987	15	2.372394	15
10	2.328989	15	2.378460	15	2.426437	15	2.473034	15
11	2.407162	15	2.459535	15	2.510348	15	2.559720	15
12	2.475082	15	2.529998	15	2.583296	15	2.635100	15
13	2.534608	15	2.591766	15	2.647258	15	2.701210	15
14	2.587183	15	2.646334	15	2.703775	15	2.759635	15
15	2.633943	15	2.694875	15	2.754058	15	2.811625	15
16	2.675793	15	2.738325	15	2.799075	15	2.858177	15
17	2.713460	15	2.777438	15	2.839604	15	2.900093	15
18	2.747537	15	2.812828	15	2.876280	15	2.938028	15
19	2.778511	15	2.844999	15	2.909622	15	2.972519	15
20	2.806784	15	2.874368	15	2.940064	15	3.004012	15
25	2.917753	15	2.989663	15	3.059597	15	3.127700	15
50	3.157521	15	3.238917	15	3.318147	15	3.395366	15
100	3.287017	15	3.373608	15	3.457932	15	3.540148	15
1000	3.409460	15	3.501007	15	3.590190	15	3.677173	15
10000	3.422024	15	3.514081	15	3.603765	15	3.691239	15
100000	3.423283	15	3.515392	15	3.605126	15	3.692650	15
1000000	3.423409	15	3.515523	15	3.605262	15	3.692791	15
10000000	3.423422	15	3.515536	15	3.605276	15	3.692805	15
100000000	3.423423	15	3.515538	15	3.605277	15	3.692806	15
1000000000	3.423423	15	3.515538	15	3.605278	15	3.692807	15

Таблица 1.7: Оценки  $\zeta_{\text{clique}}(k, m)$  для  $m$  от 17 до 20

## Глава 2

# Хроматические числа трёхмерных графов расстояний без тетраэдров и треугольников

### 2.1 Доказательство теоремы 2

В главе 1 на рисунке 1.1 мы показали граф, который называется «Мозеровское веретено». Это граф, который состоит из двух пар равносторонних треугольников. Треугольники в каждой паре имеют одну общую сторону, образуя так называемую «иглу». Две «иглы» расположены таким образом, что один «конец» каждой иглы совпадает с «концом» другой, а вторые «концы» удалены на расстояние 1 друг от друга.

Очевидно, что хроматическое число Мозеровского веретена равно четырём.

Приступим непосредственно к построению графа расстояний, удовлетворяющего условию теоремы. Введём в пространстве декартову систему координат, зафиксируем плоскость  $z = 0$ . Отметим точку  $A$  с координатами  $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ , точку  $B$  с координатами  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$  и точку  $N$  с координатами  $(0, \frac{1}{2}, 0)$ . Затем отметим точку  $A'$ , удалённую на расстояние



$\frac{\sqrt{3}}{2}$  от точек  $A$  и  $N$ , и точку  $B'$ , удалённую на расстояние  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  от точек  $B$  и  $N$ . И, наконец, отметим на оси ординат точку  $T$ , симметричную точке  $N$  относительно прямой  $A'B'$ . Несложно проверить, что  $A' = (-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, 0)$ ,  $B' = (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, 0)$ , а  $T = (0, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ .

Далее, построим пары точек  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , которые удалены от плоскости  $z = 0$  на расстояние  $\frac{1}{2}$  и проекциями которых являются, соответственно, точки  $A'$  и  $B'$ . Тогда  $A_1 = (-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $A_2 = (-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $B_1 = (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $B_2 = (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$ . Заметим, что точки  $A_1$  и  $A_2$  удалены от точек  $A$ ,  $T$  и  $N$  на расстояние 1, а точки  $B_1$  и  $B_2$  удалены от точек  $B$ ,  $T$  и  $N$  на расстояние 1.

Кроме того, построим точку  $S$ , удалённую от точек  $A$ ,  $B$  и  $N$  на расстояние 1. Без ограничения общности можем считать, что  $S = (0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Пусть  $S' = (0, 0, 0)$  — это проекция точки  $S$  на плоскость  $z = 0$ . Отметим также, что  $|ST| = \sqrt{2}$ . На рисунках 2.1 и 2.2 изображены проекции описанного графа на плоскости  $z = 0$  и  $y = 0$ .

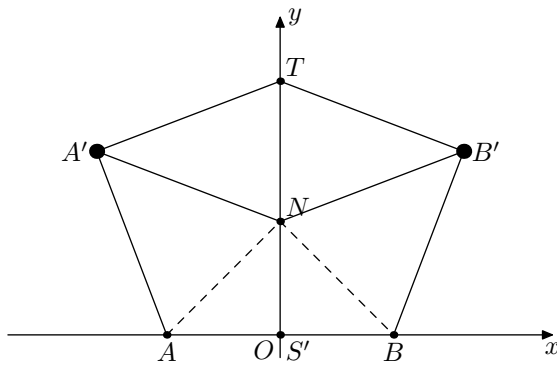


Рисунок 2.1: Вид сверху

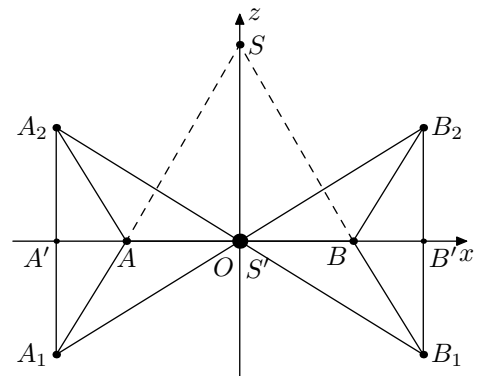


Рисунок 2.2: Вид спереди

Заметим, что вершины  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  и  $N$  образуют Мозеровское веретено (две «иглы»:  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $N$  и  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $N$ ;  $|AB| = 1$ ). Также отметим, что точка  $S$  удалена на расстояние 1 от точек  $A$ ,  $B$  и  $N$ , а точка  $T$  удалена на расстояние 1 от точек  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ . Таким образом, каждая точка Мозеровского веретена соединена ребром либо с  $S$ , либо с  $T$ .

Перейдём к завершающему этапу построения. Вначале построим правильную четырёхугольную пирамиду со стороной 1. Она изображена на рисунке 2.3.

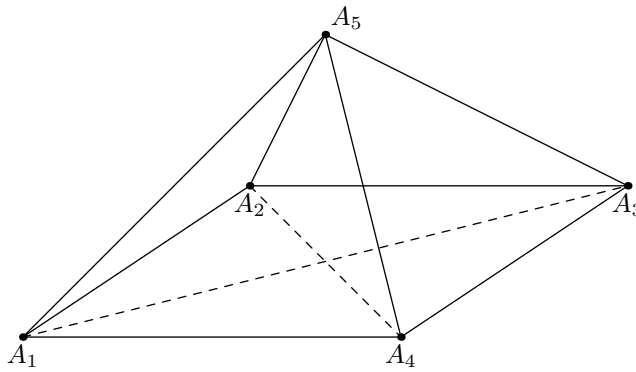


Рисунок 2.3: Четырёхугольная пирамида

До полного графа на пяти вершинах четырёхугольной пирамиде «не достаёт» двух рёбер ( $A_1A_3$  и  $A_2A_4$ ). Построим на парах вершин  $A_1, A_3$  и  $A_2, A_4$  описанную выше конструкцию. Один экземпляр этой конструкции будет построен на вершинах  $A_1$  и  $A_3$ , и этим вершинам будут соответствовать вершины  $S$  и  $T$  конструкции. Второй экземпляр мы построим, соответственно, на вершинах  $A_2$  и  $A_4$ . Это построение возможно, поскольку  $|A_1A_3| = |A_2A_4| = |ST| = \sqrt{2}$ . Теперь искомый граф расстояний  $G$  окончательно построен, осталось лишь доказать, что его хроматическое число не меньше пяти и что он не содержит тетраэдров.

Докажем вначале, что хроматическое число построенного графа не меньше пяти. Действительно, предположим, что нам удалось покрасить вершины графа в четыре цвета. Тогда очевидно, что хотя бы в одной из пар вершин  $A_1, A_3$  и  $A_2, A_4$  обе вершины имеют один и тот же цвет (скажем, «красный»). Пусть, без ограничения общности, это пара вершин  $A_1, A_3$ . Рассмотрим теперь Мозеровское веретено, которое соответствовало этой паре одноцветных вершин. Заметим, что каждая вершина этого веретена соединена ребром с одной из вершин  $A_1, A_3$ , поэтому ни одна вершина веретена не может быть покрашена в красный цвет. Таким образом, Мозеровское веретено покрашено в три оставшихся цвета. Но, как мы знаем, хроматическое число Мозеровского веретена равно четырём. Противоречие. Значит, хроматическое число графа  $G$  не меньше пяти.

Осталось отметить, что этот граф не содержит тетраэдров. Действительно, отсутствие в графе  $G$  тетраэдров достигается вращением добавляемых

Мозеровских веретён относительно осей, проходящих через пары точек  $A_1, A_3$  и  $A_2, A_4$ , и небольшим перебором.

Теорема доказана. Добавим, что полученный граф имеет 19 вершин и 44 ребра.

## 2.2 Доказательство теоремы 3

### 2.2.1 Основная часть доказательства теоремы 3

В нашей конструкции в качестве одной из составных частей мы будем использовать модификацию графа расстояний, построенного П. О’Доннеллом и Р. Хохбергом (см. [4], сам граф изображён на рисунке 1.2). Мы обозначим его  $\mathcal{D}$  (см. рисунок 2.4).

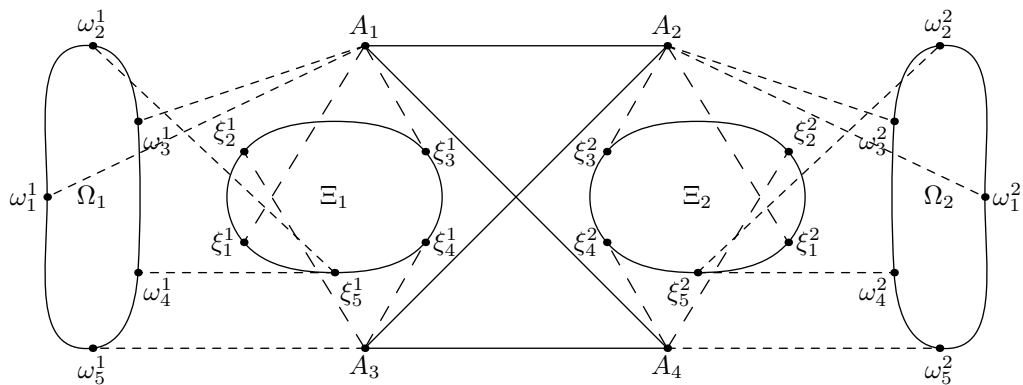


Рисунок 2.4: Граф  $\mathcal{D}$

Все отмеченные здесь точки, обозначенные строчными буквами, представляют вершины, а отрезки и дуги, как сплошные, так и пунктирные, которые их соединяют, представляют рёбра. Граф состоит из 4-цикла  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  и 5-циклов  $\Omega_1, \Omega_2, \Xi_1$  и  $\Xi_2$ , которые представлены сплошными линиями, а также нескольких рёбер, которые проведены между этими циклами.

**Лемма 1.** *Хроматическое число графа, изображённого на рисунке 2.4, равняется четырём. Кроме того, он не содержит треугольников.*

*Доказательство.* Утверждение об отсутствии треугольников очевидно. Достаточно заметить, что граф состоит из 4-цикла  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  и 5-циклов

$\Omega_1, \Omega_2, \Xi_1$  и  $\Xi_2$ , соединённых рёбрами, причём рёбра из одной вершины одного цикла никогда не ведут в соседние вершины другого.

Теперь докажем от противного, что покрасить вершины графа  $\mathcal{D}$  в три цвета нельзя. Предположим, что это удалось, тогда, поскольку вершины  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  образуют цикл, по крайней мере, одна из пар вершин  $\{A_1, A_3\}$  и  $\{A_2, A_4\}$  одноцветна. Без ограничения общности (картинка симметрична) будем считать, что это  $\{A_1, A_3\}$  и покрашены они в цвет 1. Тогда все вершины  $\Xi_1$ , кроме  $\xi_5^1$ , покрашены в цвета 2 и 3. Значит,  $\xi_5^1$  смежна с вершинами обоих цветов, то есть она может быть покрашена только в цвет 1. Теперь заметим, что все вершины  $\Omega_1$  соединены с одной из вершин цвета 1, а именно  $\{A_1, A_3, \xi_5^1\}$ , следовательно, они могут быть только цвета 2 и 3. Но покрасить нечётный цикл в 2 цвета невозможно. Противоречие, и лемма 1 доказана.  $\square$

В своей работе [4] П. О’Доннелл и Р. Хохберг разместили дистанционный граф, изоморфный построенному нами (за исключением того, что в их работе вершины  $\xi_5^1$  и  $\xi_5^2$  совпадают), на плоскости, и таким образом привели наименьший известный пример графа, являющегося ответом на вопрос П. Эрдёша о существовании графа на плоскости с хроматическим числом четыре и без циклов.

Теперь мы построим граф  $\mathcal{E}$ , который является надграфом  $\mathcal{D}$ . Как мы уже выяснили,  $\chi(\mathcal{D}) = 4$ , поэтому множество вершин  $\mathcal{D}$  можно разбить на четыре подмножества  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , так что никакие две вершины из одного подмножества не соединены ребром. Возьмём одну из таких раскрасок (разбиений множества вершин на четыре подмножества). Теперь, чтобы получить граф  $\mathcal{E}$ , мы добавляем к графу  $\mathcal{D}$  четыре вершины  $t_1, t_2, t_3, t_4$  и для каждого  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  соединяем  $t_i$  ребрами со всеми вершинами из  $B_i$  и только с ними. Одна из возможных раскрасок приведена на рисунке 2.5.

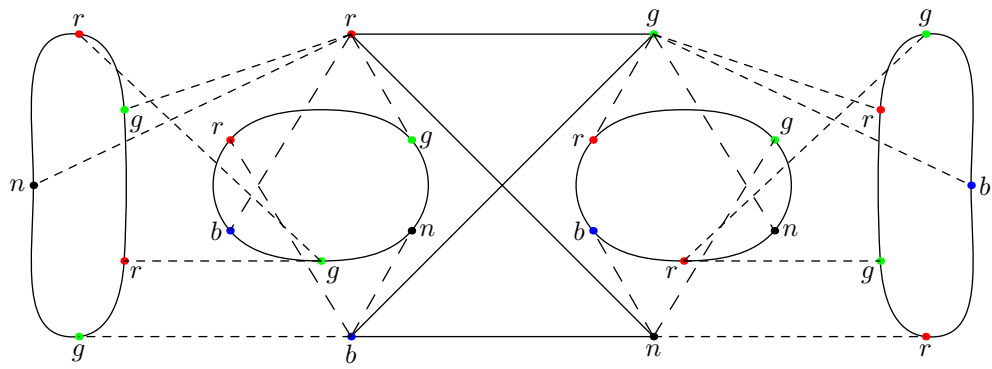


Рисунок 2.5: Раскраска графа  $\mathcal{D}$  в четыре цвета

Полученный граф  $\mathcal{E}$  выглядит следующим образом:

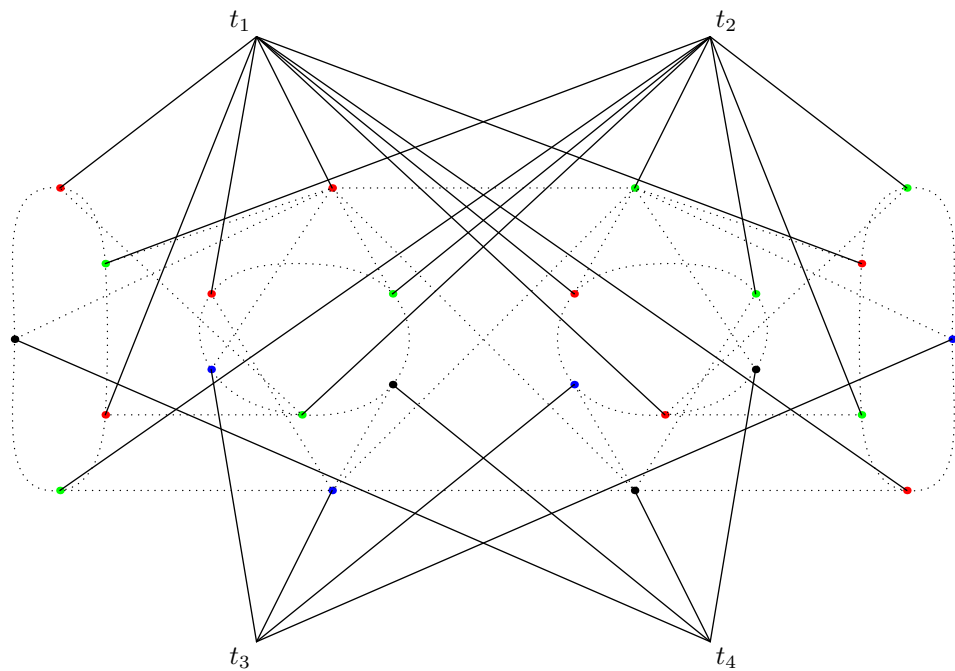


Рисунок 2.6: Граф  $\mathcal{E}$

Для данного графа верны следующие факты.

- **Хроматическое число  $\chi(\mathcal{E})$  не больше пяти.** Действительно, достаточно покрасить вершины  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  в пятый цвет, а остальные вершины в четыре цвета уже покрашены.
- **Граф  $\mathcal{E}$  не содержит треугольников,** поскольку исходный граф не содержал треугольников, а новые рёбра соединяют только вершины  $t_i$  со старыми вершинами, причём рёбра из одной вершины  $t$  проводились только в вершины одного цвета, а значит, такие вершины не были соединены ребром и не могли образовать новый треугольник.

Основная идея дальнейших рассуждений содержится в предложении 1.

**Предложение 1.** *Если в некоторой раскраске вершины  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  графа  $\mathcal{E}$  покрашены в один цвет, то для покраски всех его вершин использовано не менее пяти цветов.*

Это утверждение следует из леммы 1. Пускай вершины  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  покрашены в коричневый цвет. Так как хроматическое число  $\mathcal{D}$  равно четырём и каждая из вершин  $\mathcal{D}$  соединена с одной из коричневых вершин, то потребуется ещё по крайней мере четыре цвета для покраски оставшихся вершин (в коричневый они покрашены быть не могут).

Покажем теперь, что верна следующая лемма.

**Лемма 2.** *Граф  $\mathcal{E}$  можно разместить в пространстве<sup>1</sup> таким образом, что вершины  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  окажутся в одной точке.*

*Доказательство.* Заметим, что для доказательства леммы достаточно разместить граф  $\mathcal{D}$  на сфере единичного радиуса, поскольку тогда можно будет поместить все точки  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  в центр сферы, расположенный в начале координат, соединив их с соответствующими точками на сфере. Ниже дан пример того, как это можно сделать.

$$A_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) = (0.707107; 0.5; -0.5),$$

$$A_2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) = (0.707107; -0.5; -0.5),$$

$$A_3 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) = (0.707107; -0.5; 0.5),$$

$$A_4 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) = (0.707107; 0.5; 0.5),$$

---

<sup>1</sup>Под «размещением графа  $G = (V, E)$  в пространстве» здесь и далее мы будем понимать сопоставление модифицированного геометрического графа обычному графу, то есть процедуру, при которой вершины выбираются из точек трёхмерного пространства в качестве вершин графа ( $V \subset \mathbb{R}^3$ ), а рёбра проводятся только между вершинами, расположенными на единичном расстоянии друг от друга. На этом этапе мы используем модифицированное определение графа расстояний. Модификация состоит в том, что мы не требуем, чтобы все вершины были различны и те и только те вершины, которые находятся на расстоянии 1, были соединены рёбрами.

$$\begin{aligned}
\xi_1^1 &= (0.965911; 0.178783; -0.187222), \\
\xi_2^1 &= (0.441069; -0.417969; -0.794204), \\
\xi_3^1 &= (0.055810; -0.995652; -0.074580), \\
\xi_4^1 &= (0.876742; -0.438186; -0.198386), \\
\xi_5^1 &= (0.341607; 0.032528; -0.939280), \\
\omega_1^1 &= (0.648981; -0.577498; -0.495297), \\
\omega_2^1 &= (-0.334187; -0.701397; -0.629573), \\
\omega_3^1 &= (-0.182602; -0.924987; 0.333251), \\
\omega_4^1 &= (0.577056; -0.761141; -0.296094), \\
\omega_5^1 &= (0.953254; -0.050122; 0.297983), \\
\xi_1^2 &= (0.965911; -0.178783; -0.187222), \\
\xi_2^2 &= (0.441069; 0.417969; -0.794204), \\
\xi_3^2 &= (0.055810; 0.995652; -0.074580), \\
\xi_4^2 &= (0.876742; 0.438186; -0.198386), \\
\xi_5^2 &= (0.341607; -0.032528; -0.939280), \\
\omega_1^2 &= (0.648981; 0.577498; -0.495297), \\
\omega_2^2 &= (-0.334187; 0.701397; -0.629573), \\
\omega_3^2 &= (-0.182602; 0.924987; 0.333251), \\
\omega_4^2 &= (0.577056; 0.761141; -0.296094), \\
\omega_5^2 &= (0.953254; 0.050122; 0.297983).
\end{aligned}$$

Координаты точек округлены до шести знаков после запятой.

На рисунке 2.7 показано, как соответствующее расположение графа  $\mathcal{D}$  выглядит в пространстве (на единичной сфере). Чтобы получить расположение графа  $\mathcal{E}$ , надо все отмеченные вершины соединить с началом координат (то есть центром единичной сферы).

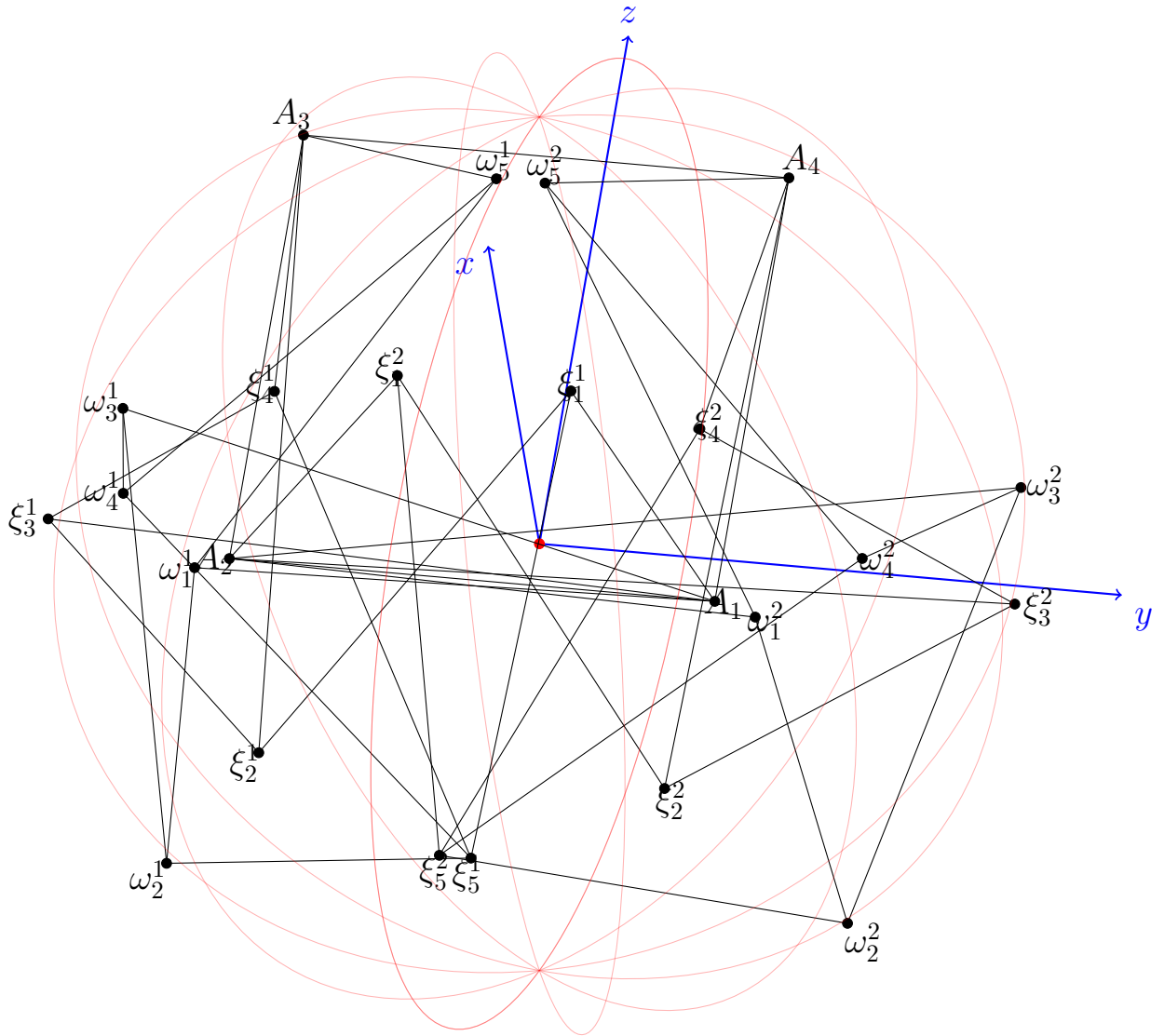


Рисунок 2.7: Расположение графа  $\mathcal{D}$  на единичной сфере

Лемма 2 доказана. □

Построенный дистанционный граф обладает следующими свойствами.

- Минимальное расстояние между любыми двумя различными вершинами больше 0.097.
- Максимальное расстояние между вершинами, имеющими общего соседа, не превосходит  $\sqrt{3} - 0.0025$ .

Построенный граф  $\mathcal{E}$  и его размещение в пространстве (обозначим его  $\mathcal{E}^0$ ) станут составными блоками графа  $\mathcal{F}$ , который является примером для



доказательства теоремы. Граф  $\mathcal{F}$  устроен следующим образом. Рассмотрим множество из тринадцати вершин  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{13}\}$ . Теперь к каждому из  $C_{13}^4 = 715$  подмножеств из четырёх вершин  $T$  добавим по копии графа  $\mathcal{D}$  таким образом, чтобы для каждой  $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in [1; 13] \cap \mathbb{N}, \forall j < k : i_j < i_k$  вершины  $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}$  и  $t_{i_4}$  и добавленный к ним граф  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  образовывали граф  $\mathcal{E}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , изоморфный графу  $\mathcal{E}$ .

Если бы различные вершины могли находиться в одной точке при размещении графа в пространстве, то можно было бы расположить граф  $\mathcal{F}$  в пространстве, просто поместив все точки из  $T$  в начало координат, а все графы  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  в точки с координатами, указанными выше. Однако нам требуется, чтобы эти разные вершины в пространстве соответствовали разным точкам. Далее мы покажем, как можно достичь этого некоторым «шевелением» вершин. Мы будем делать это в несколько шагов, при этом на каждом шаге граф, расположенный в пространстве, изоморфен графу  $\mathcal{F}$ , но расположение его в пространстве меняется. Обозначим текущее его расположение в пространстве (граф расстояний в обобщённом смысле – разрешается совпадение вершин)  $\mathcal{F}^0$ .

**Шаг 1.** Вначале мы разместим  $C_{13}^4$  копий графа  $\mathcal{D}$ , пронумерованных  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , на сфере единичного радиуса, воспользовавшись следующим предложением.

**Предложение 2.** *Для любого натурального  $k$  существует такое расположение  $k$  копий графа  $\mathcal{D}$ , что никакие вершины не совпадают и расстояние между любыми двумя вершинами из разных копий графа  $\mathcal{D}$  отлично от единицы.*

Предложение 2 будет доказано в пункте 2.2.2. Расстояние до вершин  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  от вершин множества  $T$  по-прежнему равно 1, а о том, чтобы остальные вершины не совпадали и не возникало расстояния 1 между вершинами, которые не соединены ребром в графе  $\mathcal{F}$ , мы позаботились. Полученные на этом шаге дистанционные графы, соответствующие подграфам  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  графа  $\mathcal{F}$ , мы обозначим  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^1$ .

**Шаг 2.** Теперь мы «пошевелим» вершины  $t_1, t_2, \dots, t_{13}$  так, чтобы они перестали совпадать, сохраняя при этом все проведённые рёбра. Чтобы

сделать это, мы поместим их в разные точки в малой окрестности начала координат. Строгое объяснение, как выбрать эту окрестность и окончательно построить граф, требуемый для доказательства теоремы, мы дадим в пунктах 2.2.3 и 2.2.4.

**Лемма 3.** *Построенный граф расстояний в  $\mathbb{R}^3$  удовлетворяет условиям теоремы, то есть его хроматическое число равно пяти и он не содержит треугольников.*

*Доказательство.* Для доказательства леммы заметим, что покрасить граф в пять цветов не составляет труда. Достаточно покрасить все вершины  $T$  в красный цвет. При этом мы знаем, что каждый из графов  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  красится в четыре не красных цвета. Покрасим каждый из этих графов в четыре цвета. Вершины подграфа  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  соединены только друг с другом и с  $T$ , таким образом, вершины одного цвета не соединены ребром, то есть нам удалось покрасить граф  $\mathcal{F}$  в пять цветов. Покажем теперь, что в нём нет треугольников и что его нельзя покрасить в четыре цвета.

В исходном графе  $\mathcal{D}$  не было треугольников. Мы не соединяли рёбрами два различных графа  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  и  $\mathcal{D}_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ , поэтому треугольника, в котором есть вершины из двух различных подграфов  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , возникнуть не могло. Вершины из  $T$  также не соединены между собой. Поскольку все вершины графа принадлежат либо  $T$ , либо одному из  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , то треугольник мог появиться только на двух вершинах графа  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  и одной вершине из  $T$ , но этого тоже не произошло, поскольку каждая из вершин  $T$  была присоединена только к вершинам, не соединённым между собой ребром (мы их присоединяли к вершинам одного цвета из правильной раскраски). Таким образом, в получившемся графе отсутствуют треугольники.

Покажем теперь, что граф нельзя покрасить в четыре цвета. Предположим противное и рассмотрим раскраску графа в четыре цвета. В множестве  $T$  тринадцать вершин, значит по принципу Дирихле при покраске в четыре цвета по крайней мере четыре из них будут одного цвета. Без ограничения общности будем считать, что это  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$  и покрашены они в красный цвет. Каждая вершина графа  $\mathcal{D}_{1234}$  соединена с одной из вершин  $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$ , а значит, не может быть покрашена в красный цвет. Получается, что граф  $\mathcal{D}_{1234}$  покрашен

в три цвета. Противоречие. Таким образом, покраска графа  $\mathcal{F}$  в четыре цвета невозможна.

В результате мы построили дистанционный граф в трёхмерном пространстве, хроматическое число которого равно пяти и который не содержит треугольников.  $\square$

Теорема 3 доказана.

## 2.2.2 Доказательство предложения 2

*Доказательство.* Вначале расположим все копии графа на сфере  $\Sigma$  единичного радиуса с центром в начале координат в соответствии с координатами, приведёнными в доказательстве леммы 2. Затем повернём каждый из  $k$  графов  $\mathcal{D}_i$  на некоторый угол вокруг оси  $Ox$  так, чтобы никакие из вершин различных графов  $\mathcal{D}_{i_1}$  и  $\mathcal{D}_{i_2}$  не совпадали. Для каждого  $i$  от 1 до  $k$  обозначим угол, на который поворачивается граф  $\mathcal{D}_i$ ,  $\varphi_i > 0$ , причём для каждого  $i$  выберем  $\varphi_{i+1} > \varphi_i$ . Обозначим также  $\varepsilon_1 = \varphi_1$  и для всех  $i$  от 2 до  $k$  положим  $\varepsilon_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ .

Теперь покажем, что если выбрать углы  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$  достаточно малыми, то при этом никакие вершины из разных копий графа  $\mathcal{D}_k$  не совпадут. Действительно, при вращении вокруг оси  $Ox$  могут совпасть только вершины, которые изначально находились на одной окружности в плоскости, перпендикулярной  $Ox$ . Множество точек, куда данная точка  $H$  может перейти при вращении вокруг оси  $Ox$ , является окружностью, которая получается при пересечении плоскости, перпендикулярной  $Ox$  и проходящей через точку  $H$ , со сферой  $\Sigma$ . Эту окружность мы обозначим  $C_H$ . Однако, поскольку количество точек во всех копиях графов конечно, мы можем найти минимальное расстояние между точками, лежащими на одной окружности в плоскости, перпендикулярной  $Ox$ . Таким образом, существует такое  $J$ , что если для любого  $i$  выполнено  $\varepsilon_i < J$ , то никакие вершины из разных копий графа не совпадут.

Покажем теперь, что для некоторых  $\varepsilon_i \in (0, J)$  расстояния между вершинами различных графов  $\mathcal{D}_i$  не равны единице. Для этого будем последовательно выбирать  $\varepsilon_i$  для  $i = 1, 2, \dots, k$ . Пусть для  $j = 1, \dots, i$  углы  $\varepsilon_j$

уже выбраны. Обозначим  $V_{1-i}$  множество вершин графов  $\mathcal{D}_j$  для  $j = 1, \dots, i$ . Тогда для каждой вершины  $v \in V_{1-i}$  множество точек, удалённых от  $v$  на единичное расстояние, — это окружность  $B_v$ . Для каждой вершины  $u$  графа  $\mathcal{D}_{i+1}$  окружность  $C_u$  пересекается с  $B_v$  максимум по двум точкам<sup>2</sup>. Поэтому для каждой пары  $v$  и  $u$  есть не более двух углов  $\varepsilon_{i+1}$ , при повороте на которые расстояние между этими вершинами равно единице. Всего количество таких пар конечно, значит в любой окрестности нуля можно найти угол  $\varepsilon_{i+1}$ , что при повороте на него все вершины графа  $\mathcal{D}_{i+1}$  не находятся на расстоянии 1 от всех уже отмеченных ранее вершин.  $\square$

### 2.2.3 Построение графа $\mathcal{F}$ «шевелением»: вспомогательные леммы

Прежде чем перейти к непосредственному процессу «шевеления», мы докажем следующую лемму.

**Лемма 4.** Пусть  $A_1^0, A_2^0$  и  $A_3^0$  — три точки в пространстве, такие что они не лежат на одной прямой и радиус окружности, описанной вокруг треугольника  $\triangle A_1^0 A_2^0 A_3^0$ , меньше 1. Тогда положение каждой из двух точек  $O_1$  и  $O_2$ , которые удалены от каждой из точек  $A_1, A_2$  и  $A_3$  на расстояние 1, непрерывно зависит от положения точек  $A_1, A_2$  и  $A_3$  в пространстве в некоторой окрестности точек  $A_1^0, A_2^0, A_3^0$ . Другими словами, если координаты точек суть  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  и  $(x_3, y_3, z_3)$ , то координаты  $O_1$  и  $O_2$  — непрерывные функции от переменных  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$  в некоторой 9-мерной окрестности точки  $(x_1^0, y_1^0, z_1^0, x_2^0, y_2^0, z_2^0, x_3^0, y_3^0, z_3^0)$ .

*Доказательство.* Чтобы увидеть, что эта лемма верна, вначале заметим, как можно найти координаты  $O_1$  и  $O_2$ . Во-первых, множество точек, равноудалённых от трёх данных точек, — это прямая, перпендикулярная плоскости  $A_1 A_2 A_3$  и проходящая через центр описанной окружности треугольника  $\triangle A_1 A_2 A_3$ :

$$\{X : |A_1 - X| = |A_2 - X| = |A_3 - X|\} =$$

<sup>2</sup>Поскольку  $v$  — это не точка  $(-1, 0, 0)$  или  $(1, 0, 0)$ , то  $B_v$  не является сечением сферы плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ , а значит, имеет не более двух точек пересечения с любой из таких окружностей.

$$\{O + \vec{v} \cdot x, x \in \mathbb{R}, \vec{v} \perp \langle A_1 A_2 A_3 \rangle, O \in \langle A_1 A_2 A_3 \rangle, \\ |O - A_1| = |O - A_2| = |O - A_3|\}.$$

Если нормализовать вектор  $\vec{v}$  так, чтобы у него был единичный модуль, то  $x$  определяется с точностью до знака из теоремы Пифагора:

$$x = \pm \sqrt{1 - |X - A_1|},$$

откуда мы имеем два возможных положения точки  $O$ :  $O_1$  и  $O_2$ , в случае, если радиус описанной окружности треугольника меньше 1 ( $|X - A_1| < 1$ ). Наша задача — показать, что зависимость каждого элемента в этой конструкции от положения точек  $A_1, A_2, A_3$  непрерывна.

Покажем вначале, что центр окружности  $X$  меняется непрерывно. Обозначим радиус-векторы вершин треугольника  $\vec{a} := OA_1, \vec{b} := OA_2, \vec{c} := OA_3$ . Тогда центр описанной окружности треугольника  $\triangle A_1 A_2 A_3$  можно найти по формуле:

$$O\vec{X} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \\ \alpha = \frac{|A_1|^2}{8S^2} \langle \overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3} \rangle, \beta = \frac{|A_2|^2}{8S^2} \langle \overrightarrow{A_2 A_3}, \overrightarrow{A_2 A_1} \rangle, \gamma = \frac{|A_3|^2}{8S^2} \langle \overrightarrow{A_3 A_1}, \overrightarrow{A_3 A_2} \rangle.$$

Здесь  $S$  обозначает площадь треугольника  $\triangle A_1 A_2 A_3$ . Легко видеть, что все участвующие в формуле векторы непрерывно зависят от координат точек  $A_1, A_2, A_3$  (разности координат). Соответственно, скалярные произведения — тоже непрерывные функции своих компонентов, как и суммы и произведения. Площадь  $S$  треугольника  $\triangle A_1 A_2 A_3$  также непрерывно зависит от координат вершин. Единственная возможная проблема — это деление на ноль, но этого тоже не происходит в некоторой окрестности, поскольку вершины  $A_1, A_2$  и  $A_3$  не лежат на одной прямой. Мы показали, что  $X = f_X(A_1, A_2, A_3), f_X : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — это непрерывная функция в некоторой 9-мерной окрестности точки  $A_1, A_2, A_3$ , удовлетворяющей условию леммы.

Теперь покажем, что вектор  $\vec{v}$  меняется непрерывно как функция от координат вершин  $A_1, A_2, A_3$ . Действительно, этот вектор можно представить с помощью векторного произведения: если  $\vec{j} := [\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}]$ , то  $\vec{v} = \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$ . Модуль  $\vec{j}$  не равен нулю в некоторой окрестности  $(A_1^0, A_2^0, A_3^0)$ , и он непрерывно зависит от координат вектора, значит, для непрерывности достаточно, чтобы  $\vec{j}$  непрерывно зависел от  $(A_1, A_2, A_3)$ , что выполнено.

Осталось заметить, что ввиду формулы  $x = \pm\sqrt{1 - |X - A_1|}$   $x$  непрерывно зависит от радиуса описанной окружности  $|X - A_1| = R_{\Delta A_1 A_2 A_3}$ , а тот в свою очередь непрерывно зависит от координат  $(A_1, A_2, A_3)$ , поскольку его можно найти из формулы

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}},$$

где  $a, b, c$  — это длины сторон треугольника. Поскольку у нас начальные точки общего положения, то знаменатель не обращается в ноль, то есть радиус тоже непрерывно зависит от координат  $(A_1, A_2, A_3)$  в некоторой окрестности  $(A_1^0, A_2^0, A_3^0)$ . По теореме Кантора–Гейне отсюда, в частности, следует, что координаты точек  $O_1$  и  $O_2$  — равномерно непрерывные функции в некоторой окрестности  $(A_1^0, A_2^0, A_3^0)$ .  $\square$

По аналогии с леммой 4 можно сформулировать лемму, где есть больше степеней свободы в отношении положения точки  $O$ .

**Лемма 5.** Пусть  $A_1^0$  и  $A_2^0$  — две точки в пространстве, расстояние между которыми меньше двух, но больше нуля. Также, пусть  $O^0$  — некоторая точка, такая, что  $|A_1^0 - O^0| = |A_2^0 - O^0| = 1$ . Определим множество  $\mathbb{O}(A_1, A_2)$  точек, которые удалены от каждой из точек  $A_1$  и  $A_2$  на расстояние 1. Тогда существует такая функция  $O(A_1, A_2)$ , что  $O(A_1, A_2) \in \mathbb{O}(A_1, A_2)$  и  $O$  непрерывно зависит от положения точек  $A_1$  и  $A_2$  в пространстве в некоторой окрестности точек  $A_1^0$  и  $A_2^0$  соответственно, причём  $O(A_1^0, A_2^0) = O^0$ . Другими словами, если координаты точек суть  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты точки  $O$  — непрерывные функции от переменных  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  в некоторой  $6$ -мерной окрестности точки  $(x_1^0, y_1^0, z_1^0, x_2^0, y_2^0, z_2^0)$ .

*Доказательство.* Поскольку расстояние между  $A_1^0$  и  $A_2^0$  по условию меньше двух, множество точек  $\mathbb{O}(A_1, A_2)$ , равноудалённых от них на единичное расстояние, является окружностью вращения вокруг оси, соединяющей точки  $A_1^0$  и  $A_2^0$ . То же будет верно для точек  $A_1$  и  $A_2$  в некоторой окрестности  $A_1^0$  и  $A_2^0$ , достаточно лишь выбрать окрестности так, чтобы расстояние между наиболее удалёнными точками из двух окрестностей было меньше двух, а между

ближайшими — больше нуля. Заметим, что положение окружности  $\mathbb{O}(A_1, A_2)$  меняется непрерывно. Осталось лишь выбрать точку на этой окружности некоторым способом, чтобы её положение непрерывно зависело от положения  $A_1$  и  $A_2$ .

Один из способов сделать это такой. Возьмём вектор  $\vec{v}^0$ , соответствующий направлению от оси  $A_1^0$  к вершине  $O^0$ .<sup>3</sup> Вектор  $\vec{v}^0$  перпендикулярен оси  $A_1^0A_2^0$ , поэтому для точек  $A_1$  и  $A_2$  из некоторых окрестностей  $A_1^0$  и  $A_2^0$  вектор  $\vec{v}^0$  не будет коллинеарен  $A_1A_2$ . Тогда в этих окрестностях однозначно определена точка

$$O(A_1, A_2) \equiv \arg \max_{O \in \mathbb{O}(A_1, A_2)} \langle \overrightarrow{EO}, \vec{v} \rangle,$$

где  $E$  — это середина отрезка  $A_1A_2$ .

Заметим, что скалярное произведение — непрерывная функция, множество  $\mathbb{O}(A_1, A_2)$  также меняется непрерывно, и решение единственно для  $A_1$  и  $A_2$  в некоторой окрестности точек  $A_1^0$  и  $A_2^0$ , поэтому функция  $O(A_1, A_2)$  — однозначно определённая и непрерывная функция в этой окрестности, причём  $O(A_1^0, A_2^0) = O^0$ .  $\square$

Очевидно также, что подобное лемме 5 утверждение можно сформулировать и для одной точки  $A_1$ .

**Лемма 6.** Пусть  $A_1^0$  и  $O^0$  таковы, что  $|A_1^0 - O^0| = 1$ . Тогда существует такая функция  $O(A_1)$ , что  $|A_1 - O(A_1)| = 1$  и  $O$  непрерывно зависит от положения точки  $A_1$  в пространстве, причём  $O(A_1^0) = O^0$ . Другими словами, если  $(x_1, y_1, z_1)$  — это координаты точки  $A_1$ , то координаты точки  $O$  — непрерывные функции от переменных  $x_1, y_1, z_1$  в некоторой окрестности точки  $(x_1^0, y_1^0, z_1^0)$ .

*Доказательство.* Достаточно взять  $O(A_1) = A_1 + \overrightarrow{A_1^0O^0}$ .  $\square$

Главное, что мы сделали здесь, — это определили начало координат на окружности (в лемме 5) и сфере (в лемме 6). Теперь дополним эту окружности и сферу системой координат так, чтобы точки с соответствующими координатами менялись непрерывно в зависимости от положения точек  $A_1$  и  $A_2$ . В случае с окружностью координата начала координат на окружности

<sup>3</sup>Если  $E$  — это середина отрезка  $A_1^0A_2^0$ , то  $\vec{v}^0 = \overrightarrow{EO^0}$ .

уже задана точкой  $O(A_1, A_2)$ , а направление на окружности мы зададим так, что тройка векторов  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{EO}$  и  $\vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — это направление, в котором возрастают координаты в точке  $O$ , является правой и координата каждой точки на окружности задаётся величиной дуги между  $O$  и этой точкой в направлении  $\vec{v}$ . Подобным способом можно задать координаты и на сфере, но это не понадобится нам в этой работе.

Заданная таким образом система координат на окружности будет непрерывна относительно положения точек  $A_1$  и  $A_2$  в некоторой окрестности  $A_1^0$  и  $A_2^0$  (которая задаётся в лемме 5).

## 2.2.4 Процедура «шевеления»

Как было сказано в пункте 2.2.1, мы хотим разнести положения тринадцати точек  $t_1, \dots, t_{13}$ , которые находятся в одной точке, так, чтобы оставшиеся вершины, соединённые рёбрами, остались соединёнными рёбрами. Можно представить себе граф в виде каркаса с шарнирами в вершинах, соединёнными планками, соответствующими рёбрам. Тогда в этом пункте мы покажем, что можно немного подвигать тринадцать из этих шарниров, чтобы конструкция не развалилась, а эти тринадцать шарниров, положение которых изначально совпадало, оказались в разных точках. Как уже было сказано, «шевелим» мы только вершины  $t_1, \dots, t_{13}$ . Здесь будут описаны правила, по которым меняется положение остальных вершин.

Мы введём функции, выражающие зависимость положения вершин графов  $\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4}$  от положения вершин  $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4}$ . В таблице 2.1 показана последовательность, в которой положения вершин графа зависят друг от друга.

В таблице 2.1 показан порядок присоединения вершин в графе  $\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4}$ . В первом столбце обозначена вершина, которую мы добавляем. Во втором столбце указывается, к каким ранее добавленным вершинам мы прикрепляем вершину из первого столбца. В третьем столбце написано, функцией от положения каких вершин является положение вершины из первого столбца. В четвёртом столбце показано, сколько ещё параметров надо добавить в



функцию из третьего столбца, чтобы она однозначно определяла положение вершины из первого столбца.

вершина	прикреплена к вершинам	зависимость	степеней свободы
$A_1$	$t_{i_1}$	$A_1(t_{i_1})$	2
$A_2$	$t_{i_2}, A_1$	$A_2(A_1, t_{i_2})$	1
$A_3$	$t_{i_3}, A_2$	$A_3(A_2, t_{i_3})$	1
$A_4$	$t_{i_4}, A_3, A_1$	$A_4(A_3, A_1, t_{i_4})$	0
$\xi_1^1$	$t_{i_3}, A_1, \alpha$	$\xi_1^1(t_{i_3}, A_1, \alpha)$	1
$\xi_2^1$	$t_{i_1}, A_3, \xi_1^1$	$\xi_2^1(t_{i_1}, A_3, \xi_1^1)$	0
$\xi_3^1$	$t_{i_2}, A_1, \xi_2^1$	$\xi_3^1(t_{i_2}, A_1, \xi_2^1)$	0
$\xi_4^1$	$t_{i_4}, A_3, \xi_3^1$	$\xi_4^1(t_{i_4}, A_3, \xi_3^1)$	0
$\xi_5^1$	$t_{i_2}, \xi_1^1, \xi_4^1$	$\xi_5^1(t_{i_2}, \xi_1^1, \xi_4^1)$	0
$\omega_1^1$	$t_{i_4}, A_1, \beta$	$\omega_1^1(t_{i_4}, A_1, \beta)$	1
$\omega_2^1$	$t_{i_1}, \xi_5^1, \omega_1^1$	$\omega_2^1(t_{i_1}, \xi_5^1, \omega_1^1)$	0
$\omega_3^1$	$t_{i_2}, A_1, \omega_2^1$	$\omega_3^1(t_{i_2}, A_1, \omega_2^1)$	0
$\omega_4^1$	$t_{i_1}, \xi_5^1, \omega_3^1$	$\omega_4^1(t_{i_1}, \xi_5^1, \omega_3^1)$	0
$\omega_5^1$	$t_{i_2}, A_3, \omega_4^1$	$\omega_5^1(t_{i_2}, A_3, \omega_4^1)$	0
$\xi_1^2$	$t_{i_4}, A_2, \alpha$	$\xi_1^2(t_{i_4}, A_2, \alpha)$	1
$\xi_2^2$	$t_{i_2}, A_4, \xi_1^2$	$\xi_2^2(t_{i_2}, A_4, \xi_1^2)$	0
$\xi_3^2$	$t_{i_1}, A_2, \xi_2^2$	$\xi_3^2(t_{i_1}, A_2, \xi_2^2)$	0
$\xi_4^2$	$t_{i_3}, A_4, \xi_3^2$	$\xi_4^2(t_{i_3}, A_4, \xi_3^2)$	0
$\xi_5^2$	$t_{i_1}, \xi_1^2, \xi_4^2$	$\xi_5^2(t_{i_1}, \xi_1^2, \xi_4^2)$	0
$\omega_1^2$	$t_{i_3}, A_2, \beta$	$\omega_1^2(t_{i_3}, A_2, \beta)$	1
$\omega_2^2$	$t_{i_2}, \xi_5^2, \omega_1^2$	$\omega_2^2(t_{i_2}, \xi_5^2, \omega_1^2)$	0
$\omega_3^2$	$t_{i_1}, A_2, \omega_2^2$	$\omega_3^2(t_{i_1}, A_2, \omega_2^2)$	0
$\omega_4^2$	$t_{i_2}, \xi_5^2, \omega_3^2$	$\omega_4^2(t_{i_2}, \xi_5^2, \omega_3^2)$	0
$\omega_5^2$	$t_{i_1}, A_4, \omega_4^2$	$\omega_5^2(t_{i_1}, A_4, \omega_4^2)$	0

Таблица 2.1: Порядок присоединения вершин

Например, в первой строчке таблицы написано, что положение вершины  $A_1$  зависит от вершины  $t_{i_1}$ . Это означает, что для каждого данного положения вершины  $t_{i_1}$  мы разместим вершину  $A_1$  таким образом, чтобы расстояние

между  $t_{i_1}$  и  $A_1$  равнялось единице. В шестой строке таблицы написано, что положение вершины  $\xi_2^1$  зависит от положения вершин  $t_{i_1}$ ,  $A_3$  и  $\xi_1^1$ . Таким образом, зная расположения вершин  $t_{i_1}$ ,  $A_3$  и  $\xi_1^1$  в пространстве, мы хотим расположить  $\xi_2^1$  так, чтобы она находилась на единичном расстоянии от  $t_{i_1}$ ,  $A_3$  и  $\xi_1^1$ . В соответствии с леммой 4 это можно сделать, если  $t_{i_1}$ ,  $A_3$  и  $\xi_1^1$  находятся достаточно близко к своим начальным положениям  $t_{i_1}^0$ ,  $A_3^0$  и  $\xi_1^{10}$ .

Мы последовательно проделаем эту операцию со всеми вершинами. Такой набор положения вершин существует, если  $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}$  и  $t_{i_4}$  находятся в некоторой достаточно малой окрестности нуля, поскольку изначально, когда все точки были в нуле, такое расположение существовало, а значит, в соответствии с леммами 4, 5 и 6 оно существует и в некоторой окрестности начальных положений точек, поскольку положение каждой вершины в таблице зависит от положения одной, двух или трёх других вершин. Таким образом, мы построили все вершины подграфа  $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  и убедились, что расстояние между всеми парами вершин, соединёнными ребром, кроме пар  $\{\omega_1^1, \omega_5^1\}$  и  $\{\omega_1^2, \omega_5^2\}$ , равно единице.

Как видно из таблицы 2.1, положение всех вершин однозначно определяется по координатам точек  $\{t_1, \dots, t_{13}\}$ , когда все эти точки находятся в некоторой окрестности начала координат, с точностью до 8 параметров (степени свободы в последнем столбце таблицы 2.1). С другой стороны, положение точек  $\omega_5^1$  и  $\omega_5^2$  может быть таково, что расстояние до  $\omega_4^1$  и  $\omega_4^2$  соответственно отличается от единицы. Воспользовавшись леммами 5 и 6, мы зафиксируем положение всех точек, кроме  $\omega_1^1$  и  $\omega_1^2$ . Теперь расстояние  $d(\omega_4^1, \omega_5^1) = |\omega_4^1 \omega_5^1|$  — это функция от положения точек  $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}$  и  $t_{i_4}$ , а также  $\alpha$  — координаты точки  $\omega_1^1$ , заданной в лемме 5, причём зависимость эта непрерывная.

Функция

$$d(\omega_4^1, \omega_5^1) = d(\omega_4^1(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4}, \alpha), \omega_5^1(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4}, \alpha)) = d(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4}, \alpha),$$

$$d(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4}, \alpha) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

непрерывна по всем координатам в некоторой окрестности нуля (все переменные равны нулю).

Также известно, что эта зависимость строго монотонна по  $\alpha$  в  $t_{i_1} = t_{i_2} = t_{i_3} = t_{i_4} = (0, 0, 0)$  (проверено численными методами для координат, указанных в доказательстве леммы 2) и  $d(\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, 0) = 1$ . Таким образом, неявно можно задать функцию  $\alpha(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4})$  так, что

$$d(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4}, \alpha(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4})) \equiv 1.$$

По теореме о неявной функции, функции  $\alpha(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4})$  и  $\omega_1^1(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4})$  непрерывны.

Задав таким способом с помощью неявной функции  $\alpha(t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, t_{i_4})$  координаты точки  $\omega_1^1$  (и аналогичным образом — координаты точки  $\omega_1^2$ ), мы получим, что все вершины, соединённые ребром в графе, находятся на единичном расстоянии друг от друга. Осталось выбрать такие точки  $\{t_1, \dots, t_{13}\}$ , в окрестности нуля, чтобы они не совпадали, а расстояние между всеми остальными вершинами (не соединёнными ребром) не было равно нулю или единице. Кроме того, требуется, чтобы, если три вершины таковы, что они все соединены с некоторой четвёртой вершиной ребром, то радиус описанной окружности был меньше единицы. Все эти условия соблюдены в начальном положении точек. Зависимость непрерывная, а значит, то же будет верно и в некоторой ( $3 \cdot 13 = 39$ -мерной) окрестности начальной точки. Нам подойдут любые различные точки  $\{t_1, \dots, t_{13}\}$  из этой окрестности.

## Глава 3

# Асимптотика хроматических чисел графов расстояний с несколькими запрещёнными расстояниями и без больших клик при росте размерности пространства

### 3.1 Доказательство теоремы 6

Для доказательства нам потребуется определить  $\alpha(G)$ . Это величина, в некотором смысле двойственная величине  $\omega(G)$  (отсюда и обозначение):

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \{x, y\} \notin E\}.$$

Эта величина называется *числом независимости* графа; в свою очередь, все множества вершин графа, свободные от его ребер, называются *независимыми*. Таким образом, число независимости — это мощность самого большого независимого множества вершин.

Число независимости и хроматическое число графа связывает следующее неравенство:

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

Действительно, если удалось покрасить граф в  $\chi(G)$  цветов, то множество вершин каждого цвета — это независимое множество, ведь по определению хроматического числа вершины одного цвета не должны быть соединены ребром. Поэтому мощность множества вершин каждого цвета не больше  $\alpha(G)$ . Сложив количество вершин в этих  $\chi(G)$  множествах, мы получим общее количество вершин  $|V|$ , а значит,  $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ .

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы. Зафиксируем  $k, b_0$ , а стало быть, и  $\tau_0, \tau_1, C, c$ . Легко видеть, что либо  $C = \emptyset$ , либо  $C = \{\tau_1\}$ , либо  $C = [c, \tau_1]$ ,  $c \geq \tau_0$ . В первых двух случаях утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим ситуацию, когда  $\tau_0 \leq c < \tau_1$ .

Возьмем произвольное  $c' \in (c, \tau_1)$ . Здесь важно, что  $c'$  строго больше  $c$ , хотя и сколь угодно близко к  $c$ . Если мы покажем, что  $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \frac{\tau_1}{c'}$ , то, беря инфимум обеих частей неравенства по  $c'$ , мы получим искомое утверждение  $\zeta_{\text{clique}}(k) \geq \frac{\tau_1}{c}$ .

Итак, нам нужно убедиться в существовании такой функции  $\delta(n) = o(1)$ , что при всех  $n$  найдется граф расстояний  $G = (V, E)$  в  $\mathbb{R}^n$ , у которого одновременно  $\omega(G) < k$  и  $\chi(G) \geq \left(\frac{\tau_1}{c'} + \delta(n)\right)^n$ .

Положим для каждого достаточно большого  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = [b_0 n]\}.$$

Пусть  $p$  — минимальное простое число, удовлетворяющее условию  $[b_0 n] - 2p < 0$ . Известно, что с ростом  $n$  справедлива асимптотика  $p = p(n) \sim \frac{b_0 n}{2}$ . Это обусловлено тем, что между  $x$  и  $x + O(x^{0.525})$  всегда есть простое число (см. [29]). Положим

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p} \right\}, \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n).$$

С помощью формулы Стирлинга легко показать, что

$$N = |\mathcal{V}_n| = (\tau_1 + o(1))^n.$$

Для дальнейших рассуждений используем следующую лемму.

**Лемма 7.** Зафиксируем размерность  $n$ , некоторое  $k \leq \frac{n}{2}$  и простое  $p$ , такое что  $\frac{k}{2} < p < k$ .

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$ , у которого

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \forall i x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = k\},$$

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}.$$

Тогда для числа независимости графа  $G$  выполнено следующее неравенство:

$$\alpha = \alpha(G) \leq nC_n^p.$$

*Доказательство.* Мы докажем лемму с помощью линейно-алгебраического метода в комбинаторике (см. [28], [30]). Каждому вектору  $\mathbf{x} \in V$  мы сопоставляем некоторый полином  $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ . В данном случае мы полагаем

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=0, i \neq k \pmod{p}}^{p-1} (i - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Иными словами, произведение берется по всем наименьшим неотрицательным вычетам по модулю  $p$ , кроме остатка от деления  $k$  на  $p$ .

Полиномы подобраны так, чтобы выполнялось следующее

**Свойство 1.** Для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  условие  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv k \pmod{p}$  равносильно условию  $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Свойство очевидно, и мы его не доказываем. Ясно, далее, что степень каждого полинома не превосходит  $p - 1$ . Сейчас мы еще упростим полиномы, причем так, что свойство 1 для новых полиномов останется верным. Раскроем в данном полиноме  $P_{\mathbf{x}}$  скобки. Получится линейная комбинация мономов, каждый из которых имеет вид

$$y_{i_1}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot y_{i_q}^{\alpha_q}, \quad q \leq p - 1.$$

Формально заменим всякий такой моном мономом

$$y_{i_1} \cdot \dots \cdot y_{i_q}.$$

Поскольку в свойстве 1 фигурируют лишь векторы  $y \in V$ , т.е. векторы, все координаты которых суть 0 или 1, то значение полинома не поменяется, а стало быть, свойство 1 для новых полиномов  $P'_x$  снова выполнено.

Полиномы  $P'_x$  хороши тем, что, хотя их степени по-прежнему могут достигать значения  $p - 1$ , все они содержатся в пространстве полиномов размерности  $\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i < nC_n^p$ . На сравнительной малости этой размерности мы и сыграем.

Рассмотрим произвольное независимое множество  $W = \{x_1, \dots, x_s\} \subset V$ . Иначе говоря, для любых  $i, j$  выполнено  $\langle x_i, x_j \rangle \neq k - p$ . Возьмем полиномы  $P'_{x_1}, \dots, P'_{x_s}$ . Предположим, что для некоторых  $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  имеет место сравнение

$$c_1 P'_{x_1}(y) + \dots + c_s P'_{x_s}(y) \equiv 0 \pmod{p} \quad \forall y \in V.$$

Пусть  $y = x_i$ ,  $i$  — любое. Тогда

$$\langle x_i, y \rangle = \langle x_i, x_i \rangle = k \equiv k \pmod{p}.$$

Значит, ввиду свойства 1,  $P'_{x_i}(y) \not\equiv 0 \pmod{p}$ . В то же время  $\langle x_j, y \rangle \neq k - p$ . Разумеется,  $\langle x_j, y \rangle < k$ . Но очевидно, что  $k - 2p < 0$ , т.е.  $\langle x_j, y \rangle > k - 2p$ . В итоге  $\langle x_j, y \rangle \not\equiv k \pmod{p}$ , а стало быть, опять же за счет свойства 1,  $P'_{x_j}(y) \equiv 0 \pmod{p}$  для всех  $j \neq i$ . Поскольку  $p$  — простое, имеем  $c_i \equiv 0 \pmod{p}$  при любом  $i$ .

Приведенное выше рассуждение показывает, что полиномы  $P'_{x_1}, \dots, P'_{x_s}$  линейно независимы над  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Следовательно,  $s$  не превосходит размерности пространства, порожденного этими полиномами, а она, как мы помним, не больше, чем  $nC_n^p$ . Множество  $W$  было произвольным, так что выполнено и неравенство  $\alpha(G) \leq nC_n^p$ .  $\square$

Как мы заметили в начале этой главы,  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ , а значит,

$$\chi(\mathcal{G}_n) \geq \left( \frac{\tau_1}{\tau_0} + \delta_2(n) \right)^n$$

с некоторой  $\delta_2 = o(1)$ , и это, на первый взгляд, даже лучше заявленного в теореме результата. Неприятность в том, что граф расстояний  $\mathcal{G}_n$  вполне может содержать (и содержит) клики размера больше  $k$ .

Воспользуемся вероятностным методом (см. [25], [26], [27]). Рассмотрим произвольное число  $\gamma \in (\frac{\tau_0}{c'}, 1)$ . Такое  $\gamma$  существует, поскольку  $c' > c \geq \tau_0$ . Положим  $q = \gamma^n$ , где  $n$  по-прежнему достаточно велико. Построим случайный подграф  $G = (\mathcal{V}_n, E)$  графа  $\mathcal{G}_n$ , «кладя» в  $E$  каждое ребро из  $\mathcal{E}_n$  с вероятностью  $q$  независимо от остальных ребер. Образуется вероятностное пространство  $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$ , в котором

$$\Omega_n = \{G = (\mathcal{V}_n, E), E \subseteq \mathcal{E}_n\}, \mathcal{B}_n = 2^{\Omega_n}, P_n(G) = q^{|E|}(1-q)^{|\mathcal{E}_n|-|E|}$$

для  $G = (\mathcal{V}_n, E)$ .

Определим на  $\Omega_n$  два семейства случайных величин. Во-первых, при каждом  $l \in \mathbb{N}$  и при каждом  $G \in \Omega_n$  положим  $X_l(G)$  равной числу независимых множеств вершин размера  $l$  в графе  $G$ . Во-вторых, при аналогичных условиях  $Y_m(G)$  – это число клик размера  $m$  в  $G$ .

Пусть  $l = [(c')^n]$ . Ясно, что, за счет неравенства  $c' < \tau_1$ , при больших  $n$  выполнено  $l < N = |\mathcal{V}_n|$ , а стало быть, величина  $X_l$  корректно определена.

Допустим, мы показали, что

$$\mathbb{E}X_l < \frac{1}{2}, \mathbb{E}Y_k < \frac{N}{4},$$

где через  $\mathbb{E}\xi$  обозначено математическое ожидание случайной величины  $\xi$ . Тогда по неравенству Маркова (Чебышёва) имеют место оценки (см. [31])

$$\mathbb{P}_n(X_l \geq 1) \leq \mathbb{E}X_l < \frac{1}{2}, \mathbb{P}_n\left(Y_k \geq \frac{N}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}Y_k}{N/2} < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\mathbb{P}_n(X_l = 0) > \frac{1}{2}, \mathbb{P}_n\left(Y_k < \frac{N}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Значит, существует граф  $G$  в  $\mathbb{R}^n$  с  $\alpha(G) \leq l$  и с не более, чем  $\frac{N}{2}$ , кликами размера  $k$ . Удалим из каждой клики в  $G$  по одной вершине, получится граф  $G'$  с не менее  $\frac{N}{2}$  вершинами и с  $\alpha(G') \leq l$ . В итоге

$$\chi(G') \geq \frac{N/2}{\alpha(G')} = \left(\frac{\tau_1}{c'} + \delta(n)\right)^n,$$

и теорема доказана. (Следует только заметить, что при малых  $n$  доказывать нечего, ведь мы вольны на начальном отрезке натурального ряда выбрать



значения  $\delta(n)$  сколь угодно большими по модулю.) Что ж, будем оценивать математические ожидания.

Начнём с  $\mathbb{E}X_l$ . За счет линейности математического ожидания, имеем

$$\mathbb{E}X_l = \sum_{W \subset \mathcal{V}_n, |W|=l} (1-q)^{r(W)}, \quad r(W) = |\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{E}_n : \mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in W\}|.$$

Ясно, что, поскольку  $c' > \tau_0$ , то  $l > \alpha = \alpha(\mathcal{G}_n)$  при всех достаточно больших  $n$ , и, стало быть, для каждого  $W \subset \mathcal{V}_n, |W| = l$ , выполнено  $r(W) > 0$ . Нетрудно, однако, установить и гораздо более точное неравенство  $r(W) \geq \frac{l^2}{4\alpha}$ , верное при  $l > \alpha$  (см. [35]).

Заметим, что

$$\frac{l^2}{4\alpha} \geq \frac{((c')^2 + \delta_3(n))^n}{(\tau_0 + \delta_4(n))^n} = \left( \frac{(c')^2}{\tau_0} + \delta_5(n) \right)^n,$$

$$\delta_3(n) = o(1), \quad \delta_4(n) = o(1), \quad \delta_5(n) = o(1).$$

Таким образом, полагая

$$A_l = \frac{l^2}{4\alpha},$$

имеем (с некоторыми  $\delta_i(n) = o(1)$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_l &\leq C_N^l \cdot (1-q)^{A_l} \leq \left( \frac{eN}{l} \right)^l \cdot (1-q)^{A_l} \leq \\ &\leq \left( \frac{\tau_1}{c'} + \delta_6(n) \right)^{(c' + \delta_7(n))^n} \cdot e^{-q \left( \frac{(c')^2}{\tau_0} + \delta_5(n) \right)^n} = e^{(c' + \delta_8(n))^n - \left( \frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n) \right)^n}. \end{aligned}$$

У нас  $\gamma > \frac{\tau_0}{c'}$ . Значит,  $\frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} > c'$ , т.е.

$$(c' + \delta_8(n))^n - \left( \frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n) \right)^n \rightarrow -\infty,$$

а

$$e^{(c' + \delta_8(n))^n - \left( \frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n) \right)^n} \rightarrow 0.$$

Следовательно, при всех достаточно больших  $n$  выполнено  $\mathbb{E}X_l < \frac{1}{2}$ , и нам остается обосновать оценку  $\mathbb{E}Y_k < \frac{N}{2}$ .

За счет линейности математического ожидания имеем  $\mathbb{E}Y_k \leq C_N^k q C_k^2$ .

Далее, поскольку  $k$  — константа (т.е.  $k$  не зависит от  $n$ ),

$$\mathbb{E}Y_k \leq N^k \cdot (\gamma^n)^{C_k^2} = (\tau_1 + \delta_{10}(n))^{nk} \gamma^{n \frac{k(k-1)}{2}} = (\tau_1 + \delta_{10}(n))^n e^{n(k-1)(\ln \tau_1 + \frac{k}{2} \ln \gamma + \delta_{11}(n))}.$$

Из определения  $c$  и из условия  $c < c'$  видно, что

$$k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c - \ln \tau_0} \right\rceil \geq \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c - \ln \tau_0} > \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c' - \ln \tau_0}.$$

Все наши прежние выкладки верны при любом  $\gamma > \frac{\tau_0}{c'}$ . Возьмем  $\gamma$  настолько близким к своей нижней границе, чтобы оказалась справедливой оценка  $k > \frac{2 \ln \tau_1}{-\ln \gamma}$ . Тогда, с учетом отрицательности величины  $\ln \gamma$ ,

$$\ln \tau_1 + \frac{k}{2} \ln \gamma < \ln \tau_1 - \ln \tau_1 = 0.$$

Таким образом,  $\mathbb{E}Y_k = o(N)$  при  $n \rightarrow \infty$ , и нужное нам неравенство при больших  $n$  имеет место.

Теорема доказана.

## 3.2 Доказательство теоремы 7

Схема действий практически полностью повторяет свой аналог из предыдущего раздела. По существу, разница только в построении графа  $\mathcal{G}_n$ .

Пусть

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\},$$

$$|\{i : x_i = -1\}| = [b_{-1}n], |\{i : x_i = 1\}| = [b_1n]\}.$$

Пусть, далее,  $p$  — минимальное простое число, удовлетворяющее условию  $[b_{-1}n] + [b_1n] - 2p < -2[b_{-1}n]$ . Положим

$$\mathcal{E}_n = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p} \right\}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n).$$

По Стирлингу,  $|\mathcal{V}_n| = (\rho_1 + o(1))^n$ . Кроме того, известно (см. [28]), что

$$\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq (\rho_0 + o(1))^n.$$

Наконец, неравенство типа  $r(W) \geq \frac{l^2}{4\alpha}$  верно и здесь. Дальнейшие рассуждения ясны, и теорема доказана.

### 3.3 Доказательство теоремы 8

Зафиксируем числа  $k, m$  и  $r$ , а также вектор  $\mathbf{v} \in \Delta$ . Если  $\rho(\mathbf{v}) \leq 0$ , то утверждение теоремы 8 тривиально. Поэтому будем считать, что  $\rho(\mathbf{v}) > 0$ .

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_n &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \dots, r\}, \\ \forall j \in \{0, 1, \dots, r-1\} |\{i : x_i = j\}| &= [v_j n], \\ |\{i : x_i = r\}| &= n - [v_0 n] - \dots - [v_{r-1} n]\}.\end{aligned}$$

Иными словами, число координат величины  $j$  в каждом векторе из  $\mathcal{V}_n$  асимптотически равно  $v_j n$ . Нетрудно видеть, что тем самым

$$N = |\mathcal{V}_n| = \left( e^{-f(\mathbf{v})} + o(1) \right)^n.$$

Положим, далее,

$$\bar{s} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \underline{s} = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Несложно убедиться в том, что  $\bar{s} \sim \bar{s}' n$ ,  $\underline{s} \sim \underline{s}' n$  (см. также [24]).

Пусть  $p$  — минимальное простое число, удовлетворяющее условию  $\bar{s} - (m+1)p < \underline{s}$ . Тогда с учетом известных фактов из теории чисел имеем  $p \sim \frac{\bar{s}' - \underline{s}'}{m+1}$ .

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left\{ \sqrt{2p}, \sqrt{4p}, \dots, \sqrt{2mp} \right\}, \\ \mathcal{E}_n &= \{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \mathcal{A} \}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n) \in \mathfrak{G}_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

В работе [23] показано, что

$$\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq \sum_{\mathbf{u} \in H} \frac{n!}{u_0! \cdot u_1! \cdot \dots \cdot u_r!},$$

где

$$H = \{ \mathbf{u} = (u_0, \dots, u_r) : u_i \in \mathbb{N}, (\mathbf{u}, \mathbf{e}) = n, (\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq p-1 \}.$$

Стандартный анализ с участием формулы Стирлинга дает запись

$$\alpha \leq \left( e^{-\min_{\eta \in H'} f(\eta)} + o(1) \right)^n.$$

Далее, следует применить вероятностный метод. Для этого выберем некоторые параметры. Во-первых, пусть  $\gamma \in [0, 1]$  таково, что  $\ln \gamma < \frac{2f(\mathbf{v})}{k}$  и

что  $-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma < -f(\mathbf{v})$ . Последнему условию можно удовлетворить, поскольку  $\rho(\mathbf{v}) > 0$ , т.е.

$$-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \frac{2f(\mathbf{v})}{k} < -f(\mathbf{v}),$$

а значит, нужно просто брать любое  $\gamma$ , при котором  $\ln \gamma$  достаточно близок к величине  $\frac{2f(\mathbf{v})}{k}$ , хотя и меньше ее строго. Во-вторых, пусть  $c$  таково, что одновременно

$$\ln c < -f(\mathbf{v}), \quad \ln c > -\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma.$$

Так, опять же, можно сделать, поскольку, ввиду неравенства  $-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma < -f(\mathbf{v})$ , интервал

$$\left( -\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma, -f(\mathbf{v}) \right)$$

не пуст.

Положим  $q = \gamma^n$ ,  $l = \lfloor c^n \rfloor$  (ср. раздел 3.1). Построим на основе графа  $\mathcal{G}_n$  случайный граф с вероятностью ребра  $q$ . Определим случайные величины  $X_l$  и  $Y_k$  в точности так же, как одноименные величины определялись в разделе 3.1. Корректность и нетривиальность определения величины  $X_l$  следует из того, что

$$l = (e^{\ln c} + o(1))^n < (e^{-f(\mathbf{v})} + o(1))^n = N,$$

$$l > \left( e^{-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma} + o(1) \right)^n > \alpha.$$

Разумеется, мы всюду далее будем считать, что  $n$  достаточно велико, опуская упоминание об этом.

Остается (см. раздел 3.1) показать, что  $\mathbb{E}X_l < \frac{1}{2}$  и  $\mathbb{E}Y_k < \frac{N}{4}$ . Проводим знакомые выкладки:

$$\mathbb{E}X_l \leq C_N^l (1-q)^{\frac{l^2}{4\alpha}} \leq e^{(c+o(1))^n - \left( \frac{\gamma c^2}{e^{-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\}} + o(1)} + o(1) \right)^n}.$$

Мы знаем, что  $\ln c > -\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma$ . Значит,  $\ln c + \ln \gamma > -\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\}$ , т.е.  $\gamma c > e^{-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\}}$ . Таким образом,

$$\frac{\gamma c^2}{e^{-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\}}} > c,$$

откуда

$$(c + o(1))^n - \left( \frac{\gamma c^2}{e^{-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\}} + o(1)} + o(1) \right)^n \rightarrow -\infty,$$

а стало быть,

$$e^{(c+o(1))^n - \left( \frac{\gamma c^2}{e^{-\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\}} + o(1)} + o(1) \right)^n} < \frac{1}{2}.$$

В свою очередь,

$$\mathbb{E}Y_k \leq C_N^k q^{C_k^2} \leq N^k q^{C_k^2} = N \cdot N^{k-1} q^{C_k^2},$$

и нам достаточно убедиться в том, что  $N^{k-1} q^{C_k^2} \rightarrow 0$ . В самом деле,

$$N^{k-1} q^{C_k^2} = \left( e^{-f(\mathbf{v})(k-1)} + o(1) \right)^n \cdot \left( \gamma^{\frac{k(k-1)}{2}} \right)^n = \left( e^{-f(\mathbf{v})(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \ln \gamma} + o(1) \right)^n.$$

Но мы знаем, что  $\ln \gamma < \frac{2f(\mathbf{v})}{k}$ , а значит,

$$-f(\mathbf{v})(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \ln \gamma < -f(\mathbf{v})(k-1) + f(\mathbf{v})(k-1) = 0,$$

так что  $e^{-f(\mathbf{v})(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \ln \gamma} \rightarrow 0$  и  $N^{k-1} q^{C_k^2} \rightarrow 0$ .

Итак, мы показали, что

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq \frac{e^{-f(\mathbf{v})}}{c} = e^{-f(\mathbf{v}) - \ln c}.$$

Беря в этом неравенстве инфимум по  $c$ , для которых  $\ln c > -\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \ln \gamma$ , и супремум по  $\gamma$ , для которых  $\ln \gamma < \frac{2f(\mathbf{v})}{k}$ , получаем оценку

$$\zeta_{\text{clique}}(k, m) \geq e^{-f(\mathbf{v}) + \min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} + \frac{2f(\mathbf{v})}{k}} = e^{\rho(\mathbf{v})}.$$

Теорема 8 доказана.

### 3.4 Небольшой комментарий к теореме 8

Из общих соображений понятно, что теоремы 6 и 7 должны быть частными случаями теоремы 8. В действительности, так оно, конечно, и есть. Разница заключается в том, что в теоремах 6 и 7 мы смогли в явном виде отыскать минимум, возникающий в формулировке теоремы 8. Иными словами, если в теореме 8 величина  $\rho(\mathbf{v})$  включает в себя минимизацию по  $\eta$ , то в теоремах 6 и

7 эта минимизация произведена заранее. При этом в последних двух теоремах  $r = 2$  и  $r = 3$  соответственно. Разумеется, мы с таким же успехом могли в тех теоремах полагать  $r = 4$  и т.д., рассматривая не  $(0,1)$ -векторы и не  $(-1,0,1)$ -векторы (которые с точки зрения нашей задачи равносильны  $(0,1,2)$ -векторам), а  $(0,1,2,3)$ -векторы и т.д. Разумеется, такое усложнение привело бы к тому, что надлежащий минимум по  $\eta$  мы не смогли бы найти явно. Но суть не в том. А суть в том, что непосредственная проверка показывает отсутствие сколь-нибудь заметных улучшений результатов теорем 6 и 7 при переходе к большему количеству значений координат в каждом векторе конструкции. Именно поэтому мы выделили случай  $m = 1$ : в нем достаточно брать  $r = 2$ ,  $r = 3$ , и это позволяет упростить вычисления.

Напротив, в теореме 8 величина  $m$  произвольная, и на поверку оказывается, что чем больше  $m$ , тем больше оптимальное значение  $r$ . Очевидно, что с большими  $r$  и перебор по симплексу  $\Delta$  весьма трудоемок, а стало быть, требуются нетривиальные соображения, помогающие такой перебор осуществлять за разумное время. Благо для каждого  $\mathbf{v} \in \Delta$  нам еще нужно вычислить минимум по  $\eta \in H'$ , где  $H'$  довольно хитро само зависит от  $\mathbf{v}$ .

Аналогичную проблему в иной ситуации преодолели авторы статьи [24]. В следующем разделе мы напомним экстремальную задачу, которую им удалось решить, и увидим, что наша задача практически с ней совпадает. В итоге нам останется лишь напомнить основные идеи из работы [24], дабы прояснить возникновение численных данных в пункте 1.3.4.

### 3.5 Решение экстремальной задачи

Итак, нам хочется численно отыскать

$$\max_{r \geq 1} \max_{\mathbf{v} \in \Delta} e^{\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v})}.$$

Однако в работе [24] изложена технология отыскания

$$\max_{r \geq 1} \max_{\mathbf{v} \in \Delta} e^{\min_{\eta \in H'} \{f(\eta)\} - f(\mathbf{v})}.$$

Там слегка иные обозначения, но смысл именно такой.

Понятно, что разница между задачами отсутствует, ведь  $k$  — это константа. Ниже мы лишь напомним основную схему оптимизации.

Прежде всего при каждом  $r$  ищем

$$\max_{\mathbf{v} \in \Delta} \left( \min_{\boldsymbol{\eta} \in H'} \{f(\boldsymbol{\eta})\} - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v}) \right).$$

Далее, замечаем, что в  $H'$  неравенство можно заменить равенством, т.е. нам нужно найти

$$S_{r,m,k} = \max_{\mathbf{v} \in \Delta} \left( \min_{\mathbf{s} \in \Delta, (\mathbf{s}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{v}) / (m+1)} f(\mathbf{s}) - \frac{k-2}{k} f(\mathbf{v}) \right),$$

где  $h(\mathbf{v}) = \bar{s}' - \underline{s}'$ .

Вводим векторы  $\mathbf{a}^i$ , исходя из утверждения (предложение 2 из [24]): функция  $h(\mathbf{v})$  вогнута на  $\Delta$ , а неравенство  $h(\mathbf{v}) \geq q$  при любом  $q$  равносильно системе из не более чем  $2^{r-1}$  линейных неравенств  $(\mathbf{v}, \mathbf{a}^i) \geq q$  с целыми неотрицательными векторами  $\mathbf{a}^i$ , не зависящими от  $q$ . Получаем (теорема 1 из [24]), что

$$S_{r,m,k} = \max_{i=1, \dots, 2^{r-1}} \max_{0 \leq p \leq w(r,m)} \left( \min_{\mathbf{s} \in \Delta, (\mathbf{s}, \mathbf{b}) = p} f(\mathbf{s}) - \frac{k-2}{k} \min_{\mathbf{v} \in \Delta, (\mathbf{v}, \mathbf{a}^i) = (m+1)p} f(\mathbf{v}) \right),$$

где

$$w(r, m) = \min \left\{ \frac{r-1}{2}, \frac{r^2-1}{6(m+1)} \right\}.$$

Для любого  $\lambda > 0$  полагаем

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{r-1} \lambda^j} (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{r-1}) \in \mathbb{R}^r.$$

А для любого вектора  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$  с целыми неотрицательными координатами полагаем

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{r-1} \lambda^{a_{j+1}}} (\lambda^{a_1}, \lambda^{a_2}, \dots, \lambda^{a_r}) \in \mathbb{R}^r.$$

Оказывается, что (теорема 2 из [24])

$$S_{r,m,k} = \max_{i=1, \dots, 2^{r-1}} \max_{0 \leq p \leq w(r,m)} \left( f(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{k-2}{k} f(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{a}^i}) \right),$$

где  $\lambda$  — единственный положительный корень полинома  $\sum_{j=0}^{r-1} (j - p)z^j$ , а  $\mu$  — единственный положительный корень полинома  $\sum_{j=0}^{r-1} (a_{j+1}^i - (m + 1)p) z^{a_{j+1}^i}$ .

Такая задача решается достаточно легко. Ее численное решение описано в параграфе 4 статьи [24], его мы и реализуем при получении таблиц пункта 1.3.4, который завершает настоящий раздел, а с ним и всю нашу работу.



# Список литературы

- [1] Soifer A. Chromatic number of the plane: a historical essay // *Geombinatorics*. 1991. P. 13 – 15.
- [2] Erdős P. Unsolved Problems // *Congress Numerantium XV – Proceedings of the 5th British Comb. Conf.* 1975. 1976. p. 681.
- [3] Wormald N. A 4-Chromatic Graph With a Special Plane Drawing // *Australian Mathematics Society (Series A)*. 1979. Vol. 28. P. 1 – 8.
- [4] O’Donnell P., Hochberg R. Some 4-chromatic Unit-Distance Graphs without small cycles // *Geombinatorics*. 1996. Vol. 5. P. 137 – 142.
- [5] Nechushtan O. Note on the space chromatic number // *Discrete Mathematics*. 2002. Vol. 256. P. 499 – 507.
- [6] Райгородский А.М. О хроматическом числе пространства // *Успехи математических наук*. 2000. Т. 55. С. 147 – 148.
- [7] Гарднер М. Математические головоломки и развелчения. «Мир», 1999. С. 389 – 390.
- [8] Moser L., Moser W. Solution to problem 10 // *Canad. Math. Bull.* 1961. Vol. 4. P. 187 – 189.
- [9] Erdős P. Graph theory and probability // *Canadian Journal of Mathematics*. 1959. Vol. 11, no. 1. P. 34 – 38.
- [10] O’Donnell P. Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph description // *Geombinatorics*. 2000. Vol. 9, no. 3. P. 145 – 152.

- [11] O'Donnell P. Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph embedding // *Geombinatorics*. 2000. Vol. 9, no. 4. P. 180 – 193.
- [12] Hadwiger H. Ungelöste Probleme N 40 // *Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A*. 1961. Vol. 16. P. 103 – 104.
- [13] Райгородский А.М. Хроматические числа. Библиотека «Математическое просвещение». Москва: МЦНМО, 2003.
- [14] Coulson D. A 15-colouring of 3-space omitting distance one // *Discrete mathematics*. 2002. Vol. 256, no. 1. P. 83 – 90.
- [15] Cantwell K. Finite Euclidean Ramsey theory // *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. 1996. Vol. 73, no. 2. P. 273 – 285.
- [16] Иванов Л.Л. Оценка хроматического числа пространства  $\mathbb{R}^4$  // *Успехи математических наук*. 2006. Т. 61, № 5. С. 371 – 372.
- [17] Radoičić R., Tóth G. Note on the chromatic number of the space // *Discrete and Computational Geometry*. Springer, 2003. P. 695 – 698.
- [18] Larman D., Rogers C. The realization of distances within sets in Euclidean space // *Mathematika*. 1972. Vol. 19, no. 1. P. 1 – 24.
- [19] Frankl P., Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // *Combinatorica*. 1981. Vol. 1. P. 358 – 368.
- [20] Székely L. Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // *Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest*. 2002. Vol. 11. P. 649 – 666.
- [21] Райгородский А.М. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // *Успехи математических наук*. 2001. Т. 56, № 1. С. 107 – 146.
- [22] Райгородский А.М., Абсалямова М.И. О нижней оценке хроматического числа пространства  $\mathbb{R}^n$  с  $k$  запрещёнными расстояниями и метрикой  $l_1$  // *Чебышёвский сборник*. 2006. № 4. С. 105 – 112.

- [23] Райгородский А.М., Шитова (Митричева) И.М. О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с несколькими вещественными или несколькими рациональными запрещёнными расстояниями // Математический сборник. 2008. Т. 199. С. 107 – 142.
- [24] Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации / Е.С. Горская, И.М. Митричева, В.Ю. Протасов [и др.] // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 6. С. 3 – 22.
- [25] Алон Н., Спенсер Дж.Н. Вероятностный метод. Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
- [26] Bollobás B. Random graphs. Cambridge university press, 2001.
- [27] Райгородский А.М. Вероятность и алгебра в комбинаторике. Москва: МЦНМО, 2008.
- [28] Райгородский А.М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Москва: МЦНМО, 2007.
- [29] Baker R., Harman G., Pintz J. The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. 2001. Vol. 83, no. 3. P. 532 – 562.
- [30] Babai L., Frankl P. Linear algebra methods in combinatorics with applications to geometry and computer science. Department of Computer Science, The University of Chicago, 1992.
- [31] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Москва: Физматлит, 1961.

## Работы автора по теме диссертации

- [32] Рубанов О.И. Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров // Математические заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 797 – 800.
- [33] Демёхин Е.Е., Райгородский А.М., Рубанов О.И. Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 4. С. 49 – 78.
- [34] Raigorodskii A., Rubanov O. On the clique and the chromatic numbers of highdimensional distance graphs // Number Theory and Applications: Proceedings of the International Conferences on Number Theory and Cryptography. SD Adhikari and B. Ramakrishnan, Harish-Chandra Research Institute, Editors – A publication of Hindustan Book Agency, 2009. P. 149 – 157.
- [35] Райгородский А.М., Рубанов О.И. О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик // Математические заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 417 – 428.
- [36] Raigorodskii A., Rubanov O. Small clique and large chromatic number // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2009. Vol. 34. P. 441 – 445.