

ОТЗЫВ
официального оппонента Пяткина А.В.
о диссертационной работе Малышева Д.С.
«Исследование «критических» наследственных классов в анализе
вычислительной сложности задач на графах»,
представленной к защите на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Актуальность темы. Объектом исследования являются дискретные экстремальные задачи на графах.

За последние десятилетия дискретная математика претерпела бурное развитие, связанное, в первую очередь с повсеместным внедрением в повседневную жизнь компьютеров и компьютерных технологий. Это потребовало разработки новых методов исследования, обработки, передачи, хранения, защиты и анализа больших объемов информации, а также эффективного решения возникающих при этом дискретных экстремальных задач. К сожалению, большинство из таких задач оказываются в общем случае NP-трудными. Однако, как правило, для многих задач можно выделить полиномиально разрешимые подслучаи, т.е. такие сужения класса рассматриваемых объектов, для которых задача становится полиномиально разрешимой. Естественным образом возникает вопрос о поиске максимальных полиномиально разрешимых классов (или, наоборот, минимальных классов, для которых задача остается NP-трудной).

Одной из наиболее универсальных и часто используемых дискретных моделей являются графы. Поэтому дискретные экстремальные задачи на графах часто возникают из практических приложений и вызывают повышенный интерес.

Предметом исследования является определение алгоритмической сложности некоторых дискретных экстремальных задач на наследственных классах графов. Заметим, что большинство интересных классов графов обладает свойством наследственности, т.е., замкнутости относительно удаления вершин. К таким классам относятся, например, леса, двудольные графы, плоские графы, графы с ограниченной степенью и т.д. Характерной особенностью наследственных классов графов является то, что их всегда можно описать через множество запрещенных порожденных подграфов.

Следует отметить применяемый в диссертации нестандартный подход к изучению таких задач. А именно, автор пытается для фиксированной NP-трудной задачи определить систему «минимальных» наследственных классов, для которых задача остается NP-трудной. Обычно же более распространенным является обратный подход: определение сложностного статуса различных NP-трудных задач для некоторого фиксированного класса графов. Например, известно, что для двудольных графов задачи о клике и

независимом множестве полиномиально разрешимы, а задача о доминирующем множестве NP-полна, тогда как для плоских графов задачи о независимом множестве и о доминирующем множестве NP-полны, и только клика является полиномиально разрешимой. Однако такой подход не позволяет определить, с чем связано разное поведение разных NP-трудных задач при сужении классов графов, в то время как подход Д.С.Малышева в случае успеха позволяет это сделать. Тем самым использованный в диссертации метод является более универсальным и потенциально более глубоким, чем стандартные подходы.

Таким образом, актуальность исследований Д.С.Малышева обусловлена как важностью и практической значимостью изучаемых задач, так и оригинальностью и нестандартностью используемого подхода.

Научная новизна. Научное направление, связанное с изучением граничных классов графов, было открыто в начале 1980-х В.Е.Алексеевым, который доказал, что любой конечно определенный класс является П-сложным тогда и только тогда, когда он включает некоторый П-граничный класс. Однако теорема Алексеева не давала никакой информации ни о структуре систем граничных классов для задачи П, ни о ее мощности, ни о способах ее описания. На многие из этих вопросов (для некоторых задач) удалось ответить Д.С.Малышеву в представленной диссертации. Это потребовало, в частности, разработки новых методов (например, метод «критического» класса графов). Некоторые из полученных результатов (теория минимальных сложных классов) можно рассматривать как отдельное новое направление в теории наследственных классов графов.

Все результаты диссертации являются новыми. Остановимся подробнее на наиболее важных из них.

В первой главе диссертации предлагается способ расширения пределов применимости критерия В.Е. Алексеева. Доказывается критерий граничности произвольного класса графов и на его основе формулируются условия граничности классов *T* и *D*. С помощью этих условий доказывается, что указанные классы являются граничными для задачи ПОДГРАФ[*X*].

Во второй главе диссертации рассматривается понятие относительного граничного класса (обобщающее понятие граничного класса) и приводится обобщение критерия Алексеева на случай относительных граничных классов. Далее для задач о вершинном и реберном списковом ранжировании полностью описывается граничная система относительно множества лесов. Отметим, что это первая найденная относительная граничная система, не содержащая классов *T* и *D*. В конце второй главы изучается факторизация семейства наследственных классов по отношению равенства относительных граничных систем. Формулируется критерий принадлежности двух наследственных классов общему классу эквивалентности. Показывается, что при некоторых условиях граничные системы относительно объединений и пересечений двух наследственных классов выражаются через граничные системы относительно этих наследственных классов. Приведены примеры, опровергающие интуитивно очевидные предположения о том, что любой

относительный граничный класс всегда является абсолютным граничным и что минимальный сложный класс всегда является абсолютным граничным.

В третьей главе работы рассматривается гипотеза В.Е. Алексева о том, что класс T является единственным граничным для задачи о независимом множестве. Отметим, что ряд частных случаев этой гипотезы являются важными открытыми проблемами современной теории графов (например, вопрос о сложностном статусе задачи о независимом множестве на графах без индуцированных путей длины 4 остается открытым уже более 20 лет). Хотя доказать или опровергнуть эту гипотезу автору не удалось, им был получен ряд интересных результатов о сложности задачи о независимом множестве для некоторых наследственных классов графов. В частности, доказана полиномиальная разрешимость этой задачи в классах плоских графов без индуцированных триодов $T_{1,i,j}$ и плоских субкубических графов без индуцированных триодов $T_{2,2,i}$.

В четвертой главе диссертации доказываемся, что граничные системы для задач о реберной и вершинной раскраске континуальны. Это первые известные примеры задач с бесконечными граничными системами.

Пожалуй, наиболее сильные результаты диссертации представлены в пятой главе. В ней получено полное описание граничной системы для задачи о реберном списочном ранжировании, состоящее из 10 классов. Ранее ни для одной задачи не было известно полного описания граничной системы.

В шестой главе диссертации изучаются свойства минимальных сложных классов. Доказано, что для задачи распознавания принадлежности наследственному классу графов нет ни одного минимального сложного случая. Также доказано, что для любого натурального k существует задача на графах ровно с k минимальными сложными классами.

Достоверность результатов и апробация работы. Результаты опубликованы в 23 публикациях в журналах, рекомендованных ВАК РФ для докторских диссертаций, докладывались на 8 российских и международных конференциях, а также на различных научных семинарах в ведущих институтах и университетах страны. Достоверность полученных результатов не подлежит сомнению.

Стиль и оформление работы. Работа оформлена в соответствии с требованиями ВАК, хорошо структурирована, написана ясным математическим языком. Все доказательства изложены корректно. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Недостатки работы. Хотя в целом диссертация написана на очень хорошем уровне, к работе имеется ряд замечаний.

1. Ссылки на литературу в автореферате удобнее было оформить стандартным образом, а не в виде сносок.
2. Некоторые обозначения, используемые в работе, являются неудачными. Так, термин «мост» используется как для графов B_k , так и для ребер, удаление которых делает граф несвязным (хотя в последнем случае уместнее был бы термин «перешеек»). Задача ПОДГРАФ[X] кое-где обозначена как SUBGRAPH[X]. Также крайне неудачно выглядит

аббревиатура PCP для задачи о реберном списковом ранжировании. Она ассоциируется с англоязычной PCP, которая в свою очередь может обозначать как probability checkable proofs (знаменитая PCP-теорема), так и Post correspondence problem (самая известная комбинаторная алгоритмически неразрешимая задача). Заметим, что использование аббревиатуры ЗРСР никаких ненужных ассоциаций бы не вызывало.

3. Многие доказательства из глав 3, 4 и 5 были бы гораздо нагляднее и проще для восприятия, если бы в тексте диссертации имелись бы иллюстрации.

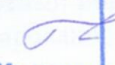
4. Из 8 конференций, на которых докладывались результаты работы, лишь одна зарубежная. Хотя никаких формальных требований по зарубежной апробации к диссертациям не предъявляется, заметим, что более активное представление результатов на зарубежных конференциях могло бы способствовать развитию интереса к данной тематике среди иностранных коллег.

Считаю, однако, что указанные недостатки не носят принципиального характера и не снижают ни научной ценности работы, ни общего положительного впечатления от нее.

Таким образом, докторская диссертация Малышева Д.С. представляет собой законченную самостоятельную научно-исследовательскую работу, выполненную на высоком научном уровне. Совокупность полученных результатов является новым научным достижением и вносит весомый вклад в развитие теории графов. Работа соответствует требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Официальный оппонент:
ведущий научный сотрудник
Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН
д.ф.-м.н. А.В.Пяткин



Подпись *А.В. Пяткина*
удостоверяю 
Зав. орготделом *Н.З. Киндалева*
ИМ СО РАН
«07» 04 20 14 г.