ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Н.Ю. Золотых

«Расшифровка пороговых и близких к ним функций», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация Н.Ю. Золотых посвящена задаче однозначного продолжения (называемой автором задачей расшифровки) пороговых функций, заданных на целочисленных подмножествах многогранных множеств. Булевозначную функцию f принято называть пороговой, если прообразы $f^{-1}(true)$ и $f^{-1}(false)$ отделимы гиперплоскостью. Отдельное внимание в диссертации уделяется пороговым функциям k-значной логики от n переменных.

Исследование задачи расшифровки дискретных функций из разных классов имеет длинную историю. Интерес к ней проявляется у специалистов в области теории тестов, дискретной оптимизации, распознавании образов и др. Впервые подобная задача появилась в трудах С.В. Яблонского по теории тестов в 50-х гг. XX в. Начиная с работ В.К. Коробкова 60-х гг., активно исследуется задача расшифровки монотонных и близких к ним функций.

Задача расшифровки пороговых функций по-видимому впервые рассмотрена В.Н. Шевченко. Ей занимались W. Maass, W. J. Bultman, M. Anthony, G. Brightwell, J. Shawe-Taylor, T. Hegedüs и др.

Изучаемые в работе задачи тесно примыкают сразу к нескольким активно развивающимся разделам современной математической кибернетики. Наряду с теорией математической логики, следует отметить теорию целочисленной и комбинаторной оптимизации, предметом изучения которой являются (в подавляющем большинстве) трудноpешаемые экстремальные задачи с целочисленными данными, вопросы обоснования новых оценок вычислительной сложности и аппроксимируемости которых представляются крайне важными. Непосредственная связь изучаемых в работе задач и разрабатываемых подходов прослеживается также с теорией распознавания образов и анализа данных, в частности, с методом бустинга классификаторов.

Таким образом **актуальность** данного диссертационного **исследования и значимость** полученных в ней **результатов не вызывают сомнений**.

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе исследуются основные свойства пороговых и близких к ним функций. Здесь приводятся как известные, так и новые результаты, которые используются в остальных главах диссертации. Отдельно рассматривается задача построения множества экстремальных лучей многогранного конуса. Предлагается ускоряющая процедура для проверки смежности экстремальных лучей в алгоритме Моцкина–Бургера, решающем данную задачу. Кратко описана программная реализация и вычислительный эксперимент, сравнивающий новую модификацию с известными ранее. Разработанный метод представляет отдельный (независимый от основной тематики данного исследования) интерес для специалистов в линейном программировании и теории систем линейных неравенств.

Во второй главе описаны предлагаемые диссертантом алгоритмы расшифровки. Предлагается полиномиальный (при фиксированном n) алгоритм расшифровки функции, множество нулей и множество единиц которой можно задать системами линейных неравенств. Предлагается алгоритм расшифровки пороговой функции, заданной на множестве целочисленных решений системы линейных неравенств. При этом используются методы выпуклой оптимизации (например, метод эллипсоидов) и целочисленного линейного программирования (нахождение вершин выпуклой оболочки целочисленных точек полиэдра). Отдельно рассматривается случай $n = 2$. Изучается также задача расшифровки с помощью расширенного оракула, принимающего на вход не только точки из области определения, но и любые точки арифметического пространства.

В третьей главе исследуются строение и мощность минимального разрешающего множества пороговой функции, на основе чего строятся оценки длины обучения и нижние оценки сложности расшифровки. Предлагается две характеризации минимального разрешающего множества. При построении верхних и нижних оценок длины обучения используются результаты о числе вершин выпуклой оболочки целочисленных точек полиэдра, принадлежащие В.Н. Шевченко и его ученикам, а также зарубежным исследователям L. Lovász, W. Cook, I. Bárány и др. Диссертантом предлагается интересный метод для оценки числа неприводимых точек полиэдра. Отдельно рассматривается случай $n = 2$. Для него устанавливаются точные значения мощности минимального разрешающего множества (3, 4), причем доказано, что среднее значение этой мощности асимптотически равно 7/2 при $k \to \infty$.

Четвертая глава посвящена связи задачи расшифровки пороговой функции с задачей нахождения наилучшего диофантового приближения, непосредственно связанной с классической теорией вещественного числа.

Давая общую оценку работе Н.Ю.Золотых, хочется отметить целостность проведенного в ней исследования, новизну полученных результатов, строгость и изящество математических доказательств и самодостаточность изложения. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 научных трудах, 11 из которых – в изданиях, рекомендуемых ВАК. Автореферат адекватно отражает содержание диссертации.

Замечания.

1. В работе получен ряд результатов, связанных с однозначным продолжением пороговых функций k-значной логики. Однако каждой такой функции (путем увеличения числа переменных) может быть сопоставлена эквивалентная классическая булевская функция. Возможно, было бы любопытно провести сравнение полученных результатов с известными результатами для данного класса функций.

2. С точки зрения приложений, например, в области распознавания образов, представляет интерес изучение «арифметического» аналога рассматриваемой в работе задачи, в котором допустима неоднозначность (или даже неверность) восстановления исходной функции на некотором подмножестве (малой меры) ее области определения, и, соответственно, получения оценок, аналогичных обоснованным в работе, в терминах меры данного подмножества.

Высказанные замечания предлагаю рассматривать в качестве пожеланий к дальнейшим исследованиям.

На основании изложенного выше, считаю, что диссертация Н. Ю. Золотых является научно-квалификационной работой, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в области математической логики и целочисленного программирования. Диссертация Н.Ю.Золотых соответствует критериям, установленным Положением о порядке присуждения ученых степеней, а соискатель заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика.

Зав. отделом математического программирования
ФГБУН «Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН»,
д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай

3.02.14

Подпись заверяю
Ученый секретарь
ИММ УрО РАН

Ульянов О.Н.