Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук
(ИМ СО РАН)

630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru
20.01.2014 № 15302-2-2171
На № ______________ от __________

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИМ СО РАН
Член-корреспондент РАН

____________ С.С. Гончаров
« 20 » января 2014 г.

Отзыв

Ведущей организации на диссертацию Н.Ю. Золотых «Расшифровка пороговых и близких к ним функций», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

В диссертации рассматривается задача определения (расшифровки) минимально возможного числа точек, по значениям в которых можно полностью восстанавливать пороговые функции, а также произвольные булевозначные функции, заданные системой линейных неравенств. Отличительными чертами данной задачи является то, что дискретная область определения функции (а также множество нулей и единиц функции) описывается с помощью вещественной системы линейных уравнений как множество точек с целочисленными координатами, содержащихся в некотором полиэдре. Таким образом, задача расшифровки пороговых функций оказывается одновременно близкой задачам линейной оптимизации и задачам теории функций k-значной логики. В работе также рассматривается несколько смежных задач таких как асимптотика числа пороговых функций, заданных на полиэдрах, сложность двойственного описания полиэдра, задача о рюкзаке, диофантово приближение алгебраических чисел. Наиболее важным результатом диссертации является нахождение асимптотики (при фиксированной размерности n и растущем размере k гиперкуба) оракульной сложности расшифровки индивидуальной пороговой функции. А именно, доказано, что для проверки совпадения произвольной пороговой функции с некоторой заданной заранее функцией необходимо и достаточно проверить совпадение значений двух функций в порядка $\log^{n-2} k$ точках.

Представленная работа основывается на результатах В.Н. Шевченко, Ю.А. Зуева, А.А. Ирматова и классических методах линейной алгебры и дискретной оптимизации. Проделанный автором тонкий анализ задач и применение нескольких оригинальных приёмов позволили в некоторых (перечисленных ниже) случаях получить окончательное качественное решение рассматриваемых задач. Как правило, для двумерного случая каждой задачи проводится специальное исследование, позволяющее уточнить константы. Для одной из центральных в этой тематике проблем − задачи нахождения асимптотически оптимального алгоритма расшифровки пороговой функции в k-ичном n-мерном гиперкубе (или доказательства неулучшаемости существующего алгоритма) полученные автором нижняя и верхняя оценки оракульной сложности метода отличаются в log k раз.

В **первой главе** диссертации изложены известные свойства пороговых функций, а также необходимые для дальнейшего изложения свойства полиэдров и систем линейных уравнений. Асимптотические оценки числа пороговых функций, т.е. функций, заданных одним линейным неравенством, обобщены на функции, заданные несколькими неравенствами. Подробно рассмотрены два описания полиэдрального конуса посредством системы линейных неравенств и посредством экстремальных лучей конуса. Предложено усовершенствование метода двойного описания Моцкина, позволяющего переходить от первого описания конуса ко второму (и наоборот). Корректность нового метода установлена аналитически, а эффективность подтверждена компьютерным экспериментом.

Во **второй главе** рассматривается задача расшифровки пороговых функций (а также функций, заданных несколькими неравенствами). Методы распознавания дискретных функций разделяются на условные и безусловные тесты. В первом случае выбор очередной точки для определения в ней значения функции зависит от значений функции в рассмотренных ранее точках, а во втором − нет. Как известно безусловный тест не эффективен для расшифровки пороговых функций, поскольку имеются функции, различающиеся только одним значением. В работе предложены два алгоритма полиномиальной сложности, первый из которых для выбора очередной точки требует решения задачи линейной оптимизации (нахождения максимума линейной функции на полиэдре). Второй алгоритм применим только для пороговых функций и имеет меньшую трудоёмкость. Под расшифровкой пороговой функции здесь подразумевается нахождение вектора, задающего одну из подходящих пороговых гиперплоскостей. Второй алгоритм выбирает вектор из текущего политопа и проверяет его пригодность с помощью оракула, затем сужает область поиска. Число шагов алгоритма оценивается с помощью геометрических лемм из статей Г. Турана и Б.С. Митягина. Отдельно рассмотрен случай пороговых функций двух переменных.

В **третьей главе** установлена нижняя оценка оракульной сложности задачи расшифровки пороговой функции. В качестве нижней оценки используется сложность расшифровки индивидуальной функции (длина обучения). Показано, что длина обучения совпадает с мощностью множества существенных точек, для каждой из которых найдётся пороговая функция, отличающаяся от исходной только в ней одной. Таким образом, длину обучения можно рассматривать как количество пороговых функций, соседних с данной. Нижняя оценка длины обучения устанавливается на основе работы С.И. Веселова о среднем числе крайних точек в задачах дискретного программирования. Верхняя оценка длины обучения вначале получена для специального класса пороговых функций, соответствующих задаче о рюкзаке. Далее, с использованием оценки числа неприводимых точек политопов, требуемая оценка обобщается на произвольные пороговые функции. В данной главе предлагается также алгоритм построения минимального разрешающего множества для пороговой функции, оракульная сложность которого близка к минимальной. Кроме того, приводится нижняя оценка сложности решения задачи о рюкзаке.

В **четвёртой главе** установлена связь задачи расшифровки пороговой функции двух переменных с проблемой приближения вещественных чисел рациональными. Здесь рациональное число рассматривается как целочисленная точка на плоскости, а вещественное как сечение Дедекинда – пороговая функция. Основываясь на предыдущих результатах, предложен полиномиальный алгоритм приближения алгебраического числа, заданного минимальным многочленом.

В числе достоинств диссертации следует отметить наличие списка обозначений, достаточное количество примеров и удобную нумерацию утверждений. Недостатком на наш взгляд является не слишком подробное изложение общего плана работы и взаимосвязей между её частями.

В диссертации замечены следующие опечатки и неточности.

Стр. 25: В формуле потерян индекс, должно быть T_0 и T_1 вместо T.

Стр. 37: В формуле (1.10) не подставлено k=2.

Стр. 63: В утверждении 1.33 должно быть «не содержится».

Стр. 66: Должно быть $O(ms^3)$, а не $O(mn^3)$.

Стр. 68: Вместо a_{ki}, должно быть a_i,

Стр. 77: Множитель k потерян в предпоследней строчке.

Стр. 103: В 3-й и 4-й снизу строчках перепутаны штрихи (R').

Стр. 108: Ошибочное задание гиперплоскости.

Стр. 110: В первом неравенстве пропущен множитель n.

Стр. 112: В формуле (3.1) пропущен параметр f.

Стр. 125: В следствии 3.13 должно быть n вместо m.

Кроме того, пример 3.23 сформулирован не вполне корректно, а в лемме 3.35 должно быть указано, что рассматриваются покрытия только из вложенных параллелепипедов.

Указанные замечания не принципиальны и не влияют на общую оценку работы. Основные результаты диссертации являются новыми; все они снабжены доказательствами и опубликованы. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях по дискретной оптимизации в Московском госуниверситете им. М.В. Ломоносова, Институте прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Нижегородском госуниверситете им. Н.И. Лобачевского.

Диссертация Н.Ю. Золотых «Расшифровка пороговых и близких к ним функций» была заслушана на семинаре отдела кибернетики ИМ СО РАН. Признано, что в ней содержится решение ряда трудных задач, имеющих существенное значение для теории дискретной оптимизации, и ее результаты можно квалифицировать как новое крупное научное достижение. Она удовлетворяет современным требованиям ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика, а автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

Заведующий лабораторией
дискретной оптимизации в исследовании операций,
д.ф.-м.н., профессор Э.Х. Гимади

Старший научный сотрудник,
к.ф.-м.н. В.Н. Потапов

Подпись Э.Х. Гимади, В.Н. Потапова
удостоверяю
Зав. орготделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«20» 01 2014 г.