Отзыв официального оппонента о диссертации Лысикова В. В. «Некоторые вопросы теории сложности билинейных отображений»,

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация В. В. Лысикова посвящена решению ряда задач алгебраической теории сложности: нахождению нижних оценок сложности умножения в алгебрах и связи структуры алгебр над произвольными полями с их сложностными характеристиками. Все эти задачи являются центральными в алгебраической теории сложности — области математики, изучающей алгебраические алгоритмы решения алгебраических задач, а также ограничения этой модели вычислений.

Одной из главных задач алгебраической теории сложности является проблема сложности умножения в алгебрах. Алгеброй в данном контексте принято называть конечномерное линейное пространство над некоторым полем, дополнительно наделённое операцией умножения векторов, являющейся ассоциативной и обладающей нейтральным элементом. Естественный *билинейный* алгоритм умножения вычисляет для двух векторов x и y из алгебры n произведений $u_i(x) \cdot v_i(y)$, где u_i, v_i — линейные формы, а затем использует эти произведения в качестве коэффициентов при векторах базиса алгебры для вычисления компонентов вектора-произведения $x \cdot y$. При этом алгоритм совершает всего n умножений, в которых оба сомножителя отличны от константы; n называется длиной билинейного алгоритма. Минимальная длина билинейного алгоритма умножения в алгебре называется билинейной сложностью алгебры, или *рангом*.

Одной из наиболее интересных задач, связанных с билинейной сложностью, является задача сложности умножения матриц. В 1969 году Ф. Штрассен предложил алгоритм сложности $O(n^{\log_2 7})$ для умножения двух квадратных матриц размера $n \times n$ вместо кубического числа операций, необходимого стандартному алгоритму умножения. Этот алгоритм является билинейным и до сих пор остаётся практически единственным практически применимым алгоритмом умножения матриц общего вида, имеющим субкубическую асимптотическую сложность. Практически сразу исследователи перешли к изучению *матричной экспоненты*, числа $\omega = \inf_\tau\{\text{сложность умножения двух матриц } n \times n = O(n^\tau)\}$. До 1978 года лучшей оценкой матричной экспоненты оставалась $\omega < \log_2 7 \approx 2.81$, следующая из алгоритма Штрассена, пока не была улучшена В. Паном. После этого ряд учёных, в том числе Ф. Штрассен, А. Шёнхаге, Д. Бини, В. Пан и другие, предложил новые интересные билинейные алгоритмы; в 1989 году Д. Копперсмит и Ш. Виноград доказали, что $\omega < 2.376$. Этот алгоритм оставался лучшим до 2010 года, когда Э. Стозерс, а немного позже В. Вассилевска-Уильямс немного его улучшили. На данный момент лучшей доказанной верхней оценкой является $\omega < 2.3737$.

В 1981 году А. Шёнхаге доказал, что значение матричной экспоненты не меняется при переходе от поля, над которым рассматриваются матрицы, к его расширению. Важным результатом диссертации В. В. Лысикова является существенное обобщение этого утверждения: значения матричной экспоненты равны для всех характеристик основного поля, кроме, быть может, конечного числа простых характеристик p. Таким образом, сложность умножения матриц над полем рациональных чисел равна сложности умножения матриц над полями почти любой простой характеристики. Отдельно хотелось бы отметить два представленных в работе доказательства, одно из которых основано на теории моделей, а второе конструктивно и даёт способ получения алгоритмов над одним полем из алгоритмов над другим.

В 1979 году А. Алдером и Ф. Штрассеном была получена общая нижняя оценка ранга произвольной ассоциативной алгебры: ранг не может быть меньше удвоенной размерности алгебры минус число максимальных двусторонних идеалов в алгебре. Были известны примеры алгебр, в которых эта сложность достигалась, в то же время был открыт вопрос о том, насколько эта оценка точна, а также вопрос полного структурного описания алгебр минимальной мультипликативной сложности, т. е. алгебр, в которых достигается оценка Алдера-Штрассена. В течение более, чем 20 лет ряд учёных, в числе которых В. Бюхи, Э. Фейг, описывали структуру алгебр минимального ранга, накладывая дополнительные ограничения на классы изучаемых алгебр, и в 2003 году М. Блезер полностью описал все алгебры минимального ранга. Позже, в 2012 в диссертации Б. В. Чокаева данный результат был обобщён на более широкое понятие *мультипликативной сложности*, для которой также справедлива оценка Алдера-Штрассена.

Особый интерес представляют оценки билинейной сложности умножения матриц. Очевидно, любая нижняя оценка ранга является одновременно нижней оценкой *тотальной сложности*, то есть общего числа операций, необходимых билинейному алгоритму для вычисления произведения двух матриц. В то же время, из верхней оценки билинейной сложности алгебры матриц получается очень близкая оценка тотальной сложности. Оценка Алдера-Штрассена в случае алгебры матриц равна $2n^2 - 1$ умножений, необходимых для вычисления произведения двух матриц $n \times n$ над произвольным полем. Данная оценка не является оптимальной, и в 1999 году М. Блезер улучшил её до $\frac{5}{2}n^2 - 1$ для больших значений n, а позднее до $2n^2 + n - 2$ для $n \geq 2$. В 2012 году Дж. Ландсберг улучшил асимптотическую оценку билинейной сложности умножения матриц размера $n \times n$ над произвольным полем до $3n^2 - o(n^2)$.[1] Однако для небольших значений n эта оценка даёт худшие значения, чем оценка Блезера. Важным результатом рецензируемой работы является улучшение на единицу оценки Блезера для матричных алгебр над расширениями полей.

После полного описания структуры алгебр минимального ранга возник интерес к алгебрам «почти минимального ранга», чья билинейная сложность на единицу выше оценки Алдера-Штрассена. В 2007 году М. Блезер и А. Мейер де Вольтер получили описание всех полупростых алгебр прочти минимального ранга над полем вещественных чисел. Оказалось, что критерием в данном случае является то, что алгебра является прямым произведением алгебры минимального ранга и алгебры гамильтоновых кватернионов. Этот результат можно было бы обобщить на случай произвольных полей, если была бы известна точная билинейная сложность алгебры обобщённых кватернионов в том случае, когда эта алгебра является алгеброй с делением. Одним из новых важнейших результатов диссертации В. В. Лысикова является доказательство того, что ранг алгебры с делением обобщённых кватернионов равен 8, как и в случае гамильтоновых кватернионов. Это позволило обобщить результат М. Блезера и А. Мейер де Вольтера на случай полупростых алгебр над произвольными полями. Кроме того, В. В. Лысиковым был получен структурный критерий минимальности локальных алгебр почти минимального ранга.

Опишем кратко содержание диссертации. Во введении приведён подробный обзор предыдущих результатов, обоснована актуальность темы и рассматриваемых задач, сформулированы цели диссертации, описана её структура и перечислены основные результаты.

В первой главе представлен алгебраический аппарат, используемый на протяжении всей диссертации.

Во второй главе исследуются билинейные отображения малого ранга, и доказывается оценка билинейной сложности кватернионов. В этой же главе формулируется и доказывается критерий почти минимальности локальных алгебр над произвольными полями.

В третьей главе приведена классификация полупростых алгебр почти минимального ранга над произвольными полями. Здесь же доказывается улучшенная нижняя оценка ранга матричных алгебр, которая вместе с результатами второй главы позволяет описать структуру полупростых алгебр над произвольными полями.

В четвёртой главе вводится понятие $\mathbb{Z}$-билинейных отображений, с помощью

[1] Аналогичная оценка для поля $GF(2)$ из двух элементов, а также оценки вида $(\frac{5}{2}+\delta)n^2 - o(n^2)$ для других конечных полей были доказаны в 2001 А. Шпилька.

которого показывается, что экспонента матричного умножения одинакова для почти всех характеристик основного поля. Приведено два доказательства этого результата, одно из которых компактно и использует методы математической логики, а второе конструктивно и приводит способ построения алгоритма над одним полем на основе алгоритма над другим полем.

В работе имеются отдельные стилистические погрешности, не снижающие, конечно, общей высокой оценки данной диссертации.

Резюмируя, можно сделать следующее заключение. Диссертация посвящена классической, и в то же время актуальной, активно развивающейся тематике. Все представленные результаты являются новыми, вносят существенный вклад в развитие алгебраической теории сложности, получены автором самостоятельно, опубликованы в ведущих российских профильных журналах и представлены на международных конференциях. При их получении автор продемонстрировал владение современными методами алгебры, а также внёс значимый вклад в их развитие. Все доказательства верны и подробно изложены. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической теории сложности и теории ассоциативных алгебр. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.09.

Считаю, что диссертация соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», а её автор В. В. Лысиков заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика».

Официальный оппонент

руководитель группы
ООО «Яндекс»
к. ф.-м. н. А. Д. Поспелов 04 февраля 2014 г.

подпись Поспелова Алексея Дмитриевича
заверяю.
[illegible] рук-ль группы по работе
со штатными сотрудниками.
04.02.2014 г.

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
"ЯНДЕКС"
YANDEX
МОСКВА