МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Жемухов Умар Хазреталиевич

РАВНОМЕРНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова Андреев Владимир Борисович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова Нефедов Николай Николаевич,
	кандидат физико-математических наук Коптева Наталья Викторовна, Department of Mathematics and Statistics University of Strathclyde, Glasgow, Scotland, UK.
Ведущая организация:	Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН.

Защита диссертации состоится 25 декабря 2013 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/.

Автореферат разослан __ ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При исследовании многих процессов в физике, химии, биологии, технике и других областях науки, где имеются неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим, часто возникают задачи, описываемые сингулярно возмущенными уравнениями, т.е. уравнениями с малыми параметрами при старших производных. Характерной чертой сингулярно возмущенных уравнений является то, что их решения имеют в областях, где они определены, особые пограничные зоны, в которых происходит резкий переход от одного устойчивого состояния к другому или к заданным граничным значениям. Такие ситуации возникают, например, в задачах гидродинамики, связанных с решением уравнений Навье–Стокса при малой вязкости или же в задачах газовой динамики, когда в окрестности ударных волн газ переходит из дозвукового в сверхзвуковое состояние.

Математическое обоснование явления пограничного слоя состоит в том, что при $\varepsilon \to 0$ решение сингулярно возмущенной краевой задачи стремится к решению вырожденной (ε=0) задачи на всем множестве определения, за исключением малой окрестности границы области, где происходит быстрый переход решения от значений внутри области к граничным значениям. Это объясняется тем, что порядок вырожденного уравнения ниже, чем порядок исходного уравнения, из-за чего часть граничных условий оказывается лишней применительно к вырожденной задаче и эти неиспользованные условия приводят к появлению в окрестности границы пограничных слоев. Достаточно много примеров, иллюстрирующих сказанное, содержится в работах Э. Дулана, Дж. Миллера и У. Шилдерса[1], Дж. Миллера, Е. О'Риордана и Г. И. Шишкина[2].

Из-за наличия пограничных слоев классические сеточные методы малоэффективны[3] для численного решения сингулярно возмущенных краевых задач. Приближенные решения, полученные с помощью таких методов на равномерных сетках, плохо аппроксимируют[4] при малых значениях параметра решения исходных задач или вовсе не сходятся к точному решению.

---

[1] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

[2] Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G. I. Fitted Numerical Methods For Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. World Scientific Co. Inc., Revised Edition, 2012

[3] Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics. Vol. 24. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[4] Roos H.-G. Layer-adapted grids for singular perturbation problems. Z. Angew. Math. Mech. V. 78 (1998). № 5. P. 291–309.

Это объясняется тем, что производные, входящие в оценку погрешности аппроксимации, зависят от ε и не являются ограниченными[5] при $\varepsilon \to 0$ вблизи границы. Поэтому для сингулярно возмущенных краевых задач возникает проблема разработки специальных сеточных методов, обладающих свойством равномерной по параметру сходимости.

Для разрешения этой проблемы в работах Н. С. Бахвалова[6] и Г. И. Шишкина[7] были предложены численные методы, использующие сгущающиеся сетки, причем в первой из них этот метод впервые применен для решения сингулярно возмущенной задачи. Сетка Бахвалова устроена так, что внутри области погрансоя узлы сгущаются по логарифмическому закону, а вне ее сетка равномерная. В основе построения кусочно-равномерной сетки Шишкина лежит требование, чтобы погранслойная составляющая решения вне слоя была ограничена величиной $N^{-\sigma}$, где σ — порядок точности разностной схемы. Отличие такой сетки от сетки Бахвалова состоит в том, что внутри пограничного слоя мелкий шаг сетки выбирается равномерным, а граница погранслоя задается явно и зависит от количества узлов сетки.

Известно[8], что гладкость искомого решения дифференциальной задачи оказывает существенное влияние на точность приближенного решения, найденного конечно-разностным методом. Между тем, если граница области, в которой рассматривается сингулярно возмущенная задача, содержит угловые точки и не предполагается выполнение в этих точках условий согласования[9], то кроме пограничных слоев, решение или (и) его производные имеют и угловые особенности. А это часто приводит к существенному усложнению анализа погрешности численного решения или же к снижению порядка точности приближенного метода. Однако есть случаи[10], когда рост производных в окрестностях угловых точек не приводит к (существенному) ухудшению погрешности приближенного решения, но обоснование этого факта требует дополнительных специальных исследований или модифика-

[5] Linss T. Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. Series: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1985. Springer, 2010.

[6] Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. №4. С. 841-859.

[7] Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[8] Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.

[9] Волков Е. А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 77. С. 89–112.

[10] Андреев В.Б. Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений смешанной краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. №1. С. 90-114.

ции существующих методов. В этом направлении следует отметить работы В. Б. Андреева[11] и Е. А. Волкова[12].

Решения сингулярно возмущенных краевых задач для уравнений в частных производных в областях с угловыми точками могут иметь сложную структуру[13], включающую регулярные, параболические (характеристические) и угловые пограничные слои вместе с угловыми особенностями. Для анализа погрешности аппроксимации дискретной задачи, как известно, важно иметь поточечные оценки производных искомого решения. Обычно, эти оценки в случае регулярных (без малого параметра) эллиптических и параболических уравнений получаются как следствие гельдеровых оценок[14] вплоть до границы. Но в сингулярно возмущенном случае, чтобы в полной мере выявить характерные свойства решения и производных (в том числе и связанные с угловыми особенностями), целесообразно сначала строить декомпозицию искомого решения на регулярную, погранслойную и угловую составляющие, которая позволяет получить оценки решения и производных отдельно для каждой компоненты. Такое разложение впервые было построено в вышеупомянутой работе Н. С. Бахвалова для получения оценок производных решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи. Позже были предложены и другие варианты декомпозиции[15, 16] решения сингулярно возмущенных задач.

Таким образом можно заключить, что для сингулярно возмущенных задач с недостаточно гладкими решениями проблема разработки и обоснования численных методов, обладающих такой же точностью, что и в случае классической гладкости, является актуальной.

Целью диссертационной работы является исследование равномерной по малому параметру сходимости в равномерной метрике разностных схем на сгущающихся сетках, аппроксимирующих сингулярно возмущенные краевые задачи для двумерного эллиптического уравнения конвекции-диффузии и уравнения теплопроводности при наличии у производных ис-

[11] Андреев В. Б. Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии в прямоугольнике // Дифференц. уравн. 2009. Т. 45. №7. С. 954–964.

[12] Волков Е. А. О дифференциальных свойствах решений уравнений Лапласа и Пуассона на параллелепипеде и эффективных оценках погрешности метода сеток// Тр. МИАН. 1969. Т. 105. С. 46–65.

[13] Kellogg R. B., Stynes M. Corner singularities and boundary layers in a simple convection-diffusion problem // J. Diff. Equ. 2005. V. 213. №1. P. 81-120.

[14] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2, М.: Наука, 1973.

[15] O'Riordan E., Shishkin G. I. A technique to provide parameter-uniform convergence for a singularly perturbed convection-diffusion equation // J. Comput. Appl. Math. 2007. V. 206. P. 136–145.

[16] O'Riordan E., Shishkin G.I Parameter uniform numerical methods for singularly perturbed elliptic problems with parabolic boundary layers // Appl. Numer. Math. 2008. V. 58. P. 1761-1772.

комых решений особенностей в угловых точках области из-за несогласованности входных данных.

Методы исследования. При выполнении диссертационного исследования использовались методы функции Грина для параболического уравнения, декомпозиции решений сингулярно возмущенных задач, теории разностных схем на сгущающихся сетках, а также метод барьерных функций получения априорных оценок.

Научная новизна. В диссертации исследована равномерная по малому параметру ε сходимость численных методов для ряда сингулярно возмущенных задач при существенно более слабых предположениях о гладкости искомых решений по сравнению с известными результатами. Именно, для сеточного решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи, входные данные которой в угловых точках прямоугольника удовлетворяют лишь условиям согласования нулевого порядка, получена равномерная по ε оценка сходимости $O(N^{-3/2} \ln^2 N)$ в сеточной норме L^h_∞ для всех $\varepsilon \in (0, 1]$. Ранее такая оценка была получена для гладкого случая в предположении выполнения в угловых точках условий согласования до 2-го порядка и при условии, что $\varepsilon \leq CN^{-1}$. В случае параболического уравнения при тех же предположениях о согласованности входных данных, что и для эллиптической задачи получена поточечная оценка погрешности сеточного решения $O(\tau + N^{-2} \ln^2 N) \ln(j + 1)$, отличающаяся лишь логарифмическим множителем от известной оценки, полученной при условии достаточной гладкости искомого решения.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью математических доказательств, использованием апробированных научных методов и средств теории конечно-разностных методов, а также вычислительными экспериментами.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретический характер. Некоторые из них могут быть использованы в качестве методологической основы при построении и обосновании сходимости сеточных аппроксимаций негладких решений для сингулярно возмущенных краевых и начально-краевых задач с угловыми особенностями и, возможно, с негладкими входными данными.

Апробация результатов. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на 4 конференциях: XVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2011» (Москва), Международная научная конференция «Fifth Conference on Numerical Analysis and Applications» (Болгария, 2012 г.), Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2012 г.), Научная конференция «Тихоновские чтения» (Москва, 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приводится в конце автореферата. Из них три статьи [1–3] в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографии, включающей 89 наименований. Общий объем диссертации составляет 75 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор литературы по теме диссертации, обосновывается актуальность темы исследования. В нём сформулирована цель диссертации, описана структура диссертации и перечислены основные результаты.

Первая глава посвящена построению разностной аппроксимации негладких решений (угловых особенностей) смешанной краевой задачи в прямоугольнике для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с характеристическими пограничными слоями.

В разделе 1.1 приводится постановка дифференциальной задачи и известное разложение[17] решения этой задачи с оценками производных для каждой компоненты, а также анализируется структура решения.

В области $\Omega = (0,1)^2$ с границей $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ рассматривается смешанная краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии:

$$\begin{aligned} Lu \equiv -\varepsilon\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + qu &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, && (1)\\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega_N, && (2)\\ u &= g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega_D, && (3) \end{aligned}$$

где $a = const > 0$, $q = const > 0$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_N$, а $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр. Правая часть и граничные функции предполагаются достаточно гладкими.

Граница области состоит из частей $\partial\Omega_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, $\partial\Omega_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, где Γ_k — стороны квадрата Ω, пронумерованные против хода часовой стрелки,

[17] Naughton A., Stynes M., Regularity and derivative bounds for a convection-diffusion problem with Neumann boundary conditions on characteristic boundaries // Z. Anal. Anwend. 2010. V. 29. № 2. P. 163-181.

начиная с $\Gamma_1 = \{\, (x,y) \in \partial\Omega \mid x = 0 \}$. Положим, что

$$g_1(y) = g(0,y),\ g_2(y) = g(1,y) \text{ и } \varphi_1(x) = \varphi(x,0),\ \varphi_2(x) = \varphi(x,1).$$

В угловых точках области предполагаются выполнеными только условия согласования нулевого порядка:

$$\frac{dg_1}{dy}(0) = -\varphi_1(0),\ \frac{dg_1}{dy}(1) = \varphi_2(0),\ \frac{dg_2}{dy}(0) = -\varphi_1(1),\ \frac{dg_2}{dy}(1) = \varphi_2(1). \quad (4)$$

Решение задачи (1)–(4) имеет сложную структуру, включающую регулярный пограничный слой в окрестности правой границы Γ_3, два характеристических слоя в окрестностях Γ_2 и Γ_4, угловые слои с угловыми особенностями в окрестностях вершин $(1,0)$, $(1,1)$ и угловые особенности в окрестностях вершин $(0,0)$, $(0,1)$. Все это создает определенные трудности при численном решении задачи (1)–(4). В частности, из-за наличия пограничных слоев, приходится использовать сгущающиеся сетки, а из-за угловых особенностей решение имеет ограниченную гладкость и это усложняет анализ погрешности приближенного решения, что требует дополнительных исследований при обосновании сходимости.

В разделе 1.2 ставится разностная задача на сетке $\overline{\Omega}^h = \overline{\omega}_x \times \overline{\omega}_y$, являющейся тензорным произведением двух кусочно-равномерных одномерных сеток Шишкина на отрезке $[0,1]$. Сетка в направлении x сгущается вблизи правой границы и состоит из двух частей $[0, 1-\sigma_x]$ и $[1-\sigma_x, 1]$ с шагами $\mathfrak{H}_1 = 2(1-\sigma_x)N^{-1}$ и $\mathfrak{h}_1 = 2\sigma_x N^{-1}$ соответственно, а в направлении y сетка сгущается в окрестностях обоих концов отрезка и состоит и трех частей $[0,\sigma_y], [1-\sigma_y, 1]$ и $[\sigma_y, 1-\sigma_y]$ с шагами $\mathfrak{h}_2 = 4\sigma_y N^{-1}$ и $\mathfrak{H}_2 = 2(1-2\sigma_y)N^{-1}$ соответственно, где $\sigma_x = \min\{1/2; c\varepsilon \ln N\}$, $\sigma_y = \min\{1/4; c\sqrt{\varepsilon}\ln N\}$, N — число узлов сетки в каждом координатном направлении.

Разностная схема[18], используемая для аппроксимации задачи (1)–(4), имеет повышенный порядок аппроксимации и является неоднородной в том смысле, что ее вид не одинаков в различных частях сеточной области и зависит от величины параметра ε. Именно, при $\varepsilon < a\mathfrak{H}_1/2$ внутри регулярного погранслоя конвективный член аппроксимируется симметричной первой разностью 2-го порядка точности, а за его пределами применяется аппроксимация односторонней разностью в полуцелых узлах. Если же $\varepsilon \geq a\mathfrak{H}_1/2$, то схема однородная и первая производная в уравнении аппроксимируется на всей сетке симметричной первой разностью. В обоих случаях для аппроксимации оператора Лапласа используется классический пятиточечный

[18] Clavero C., Gracia J.L., Lisbona F., Shishkin G.I. A robust method of improved order for convection-diffusion problems in a domain with characteristic boundaries // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2002. V. 82. №9. P. 631-647.

разностный оператор, а граничные условия Неймана аппроксимируются на четырехточечном шаблоне.

Основная теорема первой главы:

Теорема 1. *Пусть $u(x,y)$ — решение исходной задачи (1)-(4), а u_{ij}^h — решение соответствующей разностной задачи (см. в диссертации (1.10)–(1.13)) на кусочно-равномерной сетке Шишкина. Тогда при $\varepsilon \in (0,1]$ справедлива оценка сходимости*

$$\left|u(x_i,y_j) - u_{ij}^h\right| \le CN^{-3/2}\ln^2 N, \qquad (x_i,y_j) \in \overline{\Omega}^h. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1 получается путем объединения результатов теорем 2 и 3 из последующих двух разделов.

В разделе 1.3 исследуется проблема сходимости сеточного решения задачи (1)–(4) при малых значениях параметра ($\varepsilon < a\mathfrak{H}_1/2$) и основное внимание концентрируется на изучении погрешности сеточных функций характеристического и углового слоев, содержащих также угловые особенности. Для этого проводится детальный анализ погрешности аппроксимации и с применением принципа максимума и специальной барьерной функции[19] получаются новые оценки сходимости указнных погранслойных компонент численного решения. По итогам этого раздела сформулирована и доказана теорема о сходимости приближенного решения при малых значениях ε.

Теорема 2. *Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (1)–(4), а u_{ij}^h — решение соответствующей разностной задачи (см. в диссертации (1.10)–(1.13)) при $\varepsilon < a\mathfrak{H}_1/2$. Тогда при $N > N_0$, где N_0 — целое положительное число и не зависящее от ε, верны оценки*

$$\left|u(x_i,y_j) - u_{ij}^h\right| \le C \begin{cases} N^{-3/2}\ln^2 N, & \Omega_{w_1}^h \cup \Omega_{w_4}^h, \\ N^{-2}\ln^3 N, & N/2 < i \le N,\ N/4 \le j \le 3N/4, \\ N^{-2}, & 0 \le i \le N/2,\ N/4 \le j \le 3N/4, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\Omega_{w_1}^h \cup \Omega_{w_4}^h = \left\{(x_i,y_j)\right| \left(0 \le i \le N, 0 \le j < \tfrac{N}{4}\right) \cup \left(0 \le i \le N, \tfrac{3N}{4} < j \le N\right)\right\}.$$

В разделе 1.4 рассматривается случай $\varepsilon \ge a\mathfrak{H}_1/2$ и используется разностная схема с аппроксимацией конвективного члена симметричной первой разностью. Для обоснования сходимости сеточного решения в этом случае применяется тот же подход, что и в предыдущем разделе, но при получении оценки погрешности приближенного решения гладкой составляющей

[19] Andreev V. B. Pointwise approximation of corner singularities for singularly perturbed elliptic problems with characteristic layers // Internat. J. of Num. Analysis and Modeling. 2010. V. 7. №3. P. 416-428.

искомого решения требуются дополнительные исследования (применение обычной трапециевидной барьерной функции не дает нужного результа та).

Теорема 3. *Пусть* $u(x,y)$ *— решение задачи (1)–(4), а* u^h_{ij} *— решение соответствующей разностной задачи (см. в диссертации (1.10)–(1.13)) при* $\varepsilon \geq a\mathfrak{H}_1/2$. *Тогда в* $\overline{\Omega}^h$ *справедлива равномерная по параметру* ε *оценка*

$$\left|u(x_i,y_j)-u^h_{ij}\right| \leq C \begin{cases} N^{-2}\ln^2 N, & (x_i,y_j)\in \Omega^h_{w_1}\cup\Omega^h_{w_4}, \\ N^{-2}\ln^3 N, & (x_i,y_j)\in \Omega^h_{w_2}\cup\Omega^h_{w_3}, \\ N^{-2}\ln^2 N, & 0\leq i\leq N,\ N/4\leq j\leq 3N/4, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\Omega^h_{w_2}\cup\Omega^h_{w_3}=\left\{(x_i,y_j)\middle|\left(\tfrac{N}{2}<i\leq N, 0\leq j<\tfrac{N}{4}\right)\cup\left(\tfrac{N}{2}<i\leq N,\tfrac{3N}{4}<j\leq N\right)\right\}.$$

В разделе 1.5 приводятся результаты численного эксперимента.

Вторая глава посвящена численному решению на отрезке начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, решение которой имеет ограниченную гладкость в окрестности одной из угловых точек.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и изучаются свойства искомого решения и его производных, а также из решения выделяется сингулярная часть, содержащая угловую особенность. Кроме того, в этом разделе формулируется основная теорема второй главы.

В области $Q_T=\{(x,t)|\,0<x<l, 0<t\leq T\}$ рассматривается первая начально-краевая задача

$$Lu := \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{8}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t), \qquad t\in[0,T], \tag{9}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,l], \tag{10}$$

где a – постоянная, $f(x,t),\ \varphi(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Известно, что при классическом подходе для построения приближенного метода решения задачи (8)–(10) с точностью $O(\tau+h^2)$ требуется непрерывность производных $\partial^2u/\partial t^2$, $\partial^4u/\partial x^4$ вплоть до границы. А это, при условии достаточной гладкости входных функций, подразумевает выполнение, например в угловой точке $(0,0)$, условий согласования:

$$\varphi(0)=\mu_1(0) - \text{условие нулевого порядка}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t}(0) - a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0) = f(0,0) - \text{условие 1-го порядка}. \tag{12}$$

Требование выполнения условий согласования не всегда является естественным и может быть слишком обременительным.

В точке $(0,0)$ мы отказываемся от условия (12), а в $(l,0)$, для простоты изложения, предполагаем, что аналогичное условие выполнено.

Для искомого решения справедливо представление[20]

$$u(x,t)=U(x,t)+V(x,t). \tag{13}$$

Функции из (13) являются решениями следующих начально-краевых задач:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t), && (x,t)\in Q_T,\\ &U(0,t)=\mu_1(t)-V(0,t),\ U(l,t)=\mu_2(t)-V(l,t), && t\in[0,T],\\ &U(x,0)=\varphi(x), && x\in[0,l], \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}=0, \quad x\in(0,\infty),\ \ t\in(0,T],\\ &V(x,0)=0, \qquad\qquad x\in[0,\infty),\\ &V(0,t)=At, \qquad\qquad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{15}$$

где $A=\mu_{1t}(0)-a^2\varphi_{xx}(0)-f(0,0)$.

Регулярная составляющая решения $U(x,t)$ удовлетворяет в угловых точках условиям согласования до 1-го порядка и является достаточно гладкой.

Решение задачи (15) выписывается в явном виде:

$$V(x,t)=\frac{Ax}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\tau\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau=A\Big[\Big(t+\frac{x^2}{2a^2}\Big)\operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big)-\frac{x\sqrt{t}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{a\sqrt{\pi}}\Big], \tag{16}$$

где $\operatorname{erfc}(z)=1-\operatorname{erf}(z)$ – дополнительная функция ошибок.

Чтобы изучить характер угловой особенности, из этого представления находятся производные функции $V(x,t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,t)=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t)=A\operatorname{erfc}\big(x/2a\sqrt{t}\big),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(x,t)=a^4\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(x,t)=\frac{Ax}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

[20] Бижанова Г. И. Решение в пространствах Гельдера краевых задач для параболических уравнений при рассогласовании начальных и граничных данных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 36. С. 12–23.

Как видно из второго выражения, производные, входящие в погрешность аппроксимации разностной задачи, имеют угловую особенность и при приближении к угловой точке неограниченно возрастают.

Для численного решения задачи (8)–(10) используется неявная четырехточечная разностная схема на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h = \{x_m = mh,\, h = l/N,\, m = 0, ..., N\}$ и $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\, \tau = T/M,\, j = 0, ..., M\}$. Множество внутренних узлов обозначается через $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_m, t_j) : m = 1, ..., N-1,\, j = 1, ..., M\}$.

В соответствие (8)–(10) ставится разностная задача

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}y_m^j := y_{\bar{t},m}^j - a^2 y_{\bar{x}x,m}^j = f_m^j, && (x_m, t_j) \in \omega_{h\tau}, \\ &y_0^j = \mu_1(t_j),\, y_N^j = \mu_2(t_j), && t_j \in \overline{\omega}_\tau, \\ &y_m^0 = \varphi(x_m), && x_m \in \overline{\omega}_h, \end{aligned} \tag{17}$$

где $y_{\bar{t},m}^j = (y_m^j - y_m^{j-1})/\tau$, $y_{\bar{x}x,m}^j = (y_{m+1}^j - 2y_m^j + y_{m-1}^j)/h^2$, $f_m^j = f(x_m, t_j)$.

Основной результат второй главы:

Теорема 4. *Пусть y_m^j – решение разностной задачи (17), а $u(x,t)$ – решение дифференциальной задачи (8)–(10), (11). Тогда справедлива оценка погрешности*

$$\left| y_m^j - u(x_m, t_j) \right| \le C(\tau + h^2)\ln(j+1), \qquad (x_m, t_j) \in \overline{\omega}_{h\tau}.$$

Доказательство данной теоремы приводится в следующих разделах.

В разделе 2.2, используя свойства сеточной функции Грина, получаем априорную оценку. Для этого на полупрямой вводится сетка

$$\left\{(x_m, t_j) : x_m = mh,\ t_j = j\tau,\ h = l/N,\ \tau = T/M,\ \ m \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, M\right\}$$

и рассматривается вспомогательная разностная задача

$$\begin{aligned} &v_{\bar{t},m}^j - a^2 v_{\bar{x}x,m}^j = F_m^j, && m \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le M, \\ &v_0^j = 0, && 1 \le j \le M, \\ &v_m^0 = 0, && m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{18}$$

Функция Грина этой задачи и ее разностное отношение представляются в виде следующих выражений:

$$G(x_m, x_p, t_j) = \frac{2}{\pi h} \int_0^\pi q^j(\zeta) \sin(m\,\zeta) \sin(p\,\zeta)\, d\zeta,$$

и

$$G_{x,p}(x_m, x_p, t_j) = \frac{2}{\pi h^2} \int_0^{\pi} q^j(\zeta) \sin(\zeta/2) \sin(m\,\zeta) \cos\bigl((p+1/2)\,\zeta\bigr)\, d\zeta,$$

$$\text{где} \quad q(\zeta) = \Bigl(1 + (4\tau a^2/h^2) \sin^2\bigl(\zeta/2\bigr)\Bigr)^{-1},\ 1 \le j \le M,\ m, p \in \mathbb{N}.$$

Решение разностной задачи (18) представляется в виде

$$v_m^j = \sum_{k=1}^{j} \tau \sum_{p=1}^{\infty} h\, G(x_m, x_p, t_{j+1-k})\, F_p^k, \quad m, p \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le M. \tag{19}$$

Справедливы оценки

$$|G(x_m, x_p, t_{j+1-k})| \le 2h^{-1}, \quad 1 \le k \le j \le M,\ m, p \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{\nu=1}^{j} \tau \max_p \bigl| G(x_m, x_{p+1}, t_\nu) - G(x_m, x_p, t_\nu) \bigr| h^{-1} \le C \ln(j+1),\ \ 1 \le j \le M.$$

Из (19), используя последнее неравенство, получим априорную оценку.

Теорема 5. *Пусть F_m^j – сеточная функция, убывающая на бесконечности. Тогда для решения задачи (18) справедлива поточечная оценка*

$$\bigl|v_m^j\bigr| \le C \ln(j+1) \max_k \sum_{p=0}^{\infty} h \Bigl| \sum_{n=p+1}^{\infty} h\, F_n^k \Bigr|, \quad 1 \le k \le j \le M,\ m \in \mathbb{N}.$$

В разделе 2.3 строится дискретный аналог декомпозиции (13) и для соответствующих разностных схем, аппроксимирующих задачи (14) и (15), доказываются оценки сходимости.

В частности, погрешность численного решения $z_m^j = y_m^j - u(x_m, t_j)$ представляется в виде суммы

$$z_m^j = \widetilde{z}_m^j + \mathring{z}_m^j = V_m^j - V(x_m, t_j) + U_m^j - U(x_m, t_j).$$

Первое слагаемое этой суммы предствляет собой решение разностной задачи, аналогичной (18), с правой частью $\widetilde{\psi}_m^k = LV(x_m, t_j) - \mathcal{L}V_m^j$, где $\mathcal{L}$ – разностный оператор из (17). А второе слагаемое есть решение разностной схемы

$$\begin{array}{ll} \mathring{z}_{\bar t}^j - a^2 \mathring{z}_{\bar x x, m}^j = \mathring{\psi}_m^j, & (x_m, t_j) \in \omega_{h\tau}, \\ \mathring{z}_0^j = 0,\ \mathring{z}_N^j = V_N^j - V(x_N, t_j), & t_j \in \overline{\omega}_\tau, \\ \mathring{z}_m^0 = 0, & x_m \in \overline{\omega}_h, \end{array} \tag{20}$$

где погрешность аппроксимации $\mathring{\psi}_m^j = LU(x_m, t_j) - \mathcal{L}U_m^j$.

Такое разложение позволяет провести анализ погрешности приближенного решения отдельно для каждой компоненты.

Для сингулярной составляющей погрешности справедливо представление

$$\widetilde{z}_m^j = \sum_{k=1}^{j} \tau \sum_{p=1}^{\infty} h\, G(x_m, x_p, t_{j+1-k})\, \widetilde{\psi}_p^k, \quad m \in \mathbb{N},\, 1 \le j \le M,$$

из которого, используя результат теоремы 5, получаем оценку сходимости сингулярной составляющей численного решения к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Теорема 6. *Пусть $V(x,t)$ – решение дифференциальной задачи (15) на отрезке $[0,l]$, а V_m^j – решение соответствующей разностной схемы (см. в диссертации (2.20)). Тогда справедлива оценка*

$$|\widetilde{z}_m^j| = \left|V_m^j - V(x_m, t_j)\right| \le C(h^2 + \tau)\ln(j+1), \qquad (x_m, t_j) \in \overline{\omega}_{h\tau}.$$

Оценка для $\mathring{z}_m^j$ – гладкой компоненты погрешности численного решения получается при помощи стандартных рассуждений с применением принципа максимума.

В разделе 2.4 приводятся результаты численных расчетов.

Третья глава посвящена исследованию равномерной сходимости четырехточечной неявной разностной схемы, аппроксимирующей начально-краевую задачу из предыдущей главы, в случае сингулярного возмущения и наличия угловых особенностей в окрестностях двух угловых точек.

В разделе 3.1 даются постановки дифференциальной и разностной задач, обсуждаются предположения о гладкости входных данных и их согласованности в угловых точках.

В области Q_T рассматривается начально-краевая задача (8)–(10) с малым параметром ε^2 ($\varepsilon \in (0,1]$) перед старшей производной, вместо коэффициента a^2. Правая часть и граничные функции предполагаются достаточно гладкими, последние удовлетворяют только условиям согласования нулевого порядка:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0). \tag{21}$$

Решение обсуждаемой задачи при $\varepsilon \to 0$ имеет вдоль границ $x = 0$ и $x = l$ параболические пограничные слои, где решение быстро меняется, а старшие производные имеют в угловых точках особенности порядка $c\,t^{-1}$.

Для численного решения указанной задачи используется четырехточечная неявная схема на равномерной по времени и кусочно-равномерной по пространству сетке: $\overline{\Omega}_{h\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$, где $\overline{\Omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\, \tau = T/M,\, j =$

$0, ..., M\}$ равномерная сетка по временной переменной, а $\overline{\Omega}_h$ – кусочно равномерная сетка Шишкина с шагами $h = 4\sigma N^{-1}$ на отрезках $[0, \sigma]$, $[l - \sigma, l]$ и $H = 2(l - 2\sigma)N^{-1}$ на $[\sigma, l - \sigma]$, где $\sigma = \min\{l/4, 2\varepsilon \ln N\}$. Множество внутренних узлов обознчается через $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau = \overline{\Omega}_{h\tau} \cap Q_T$.

В разделе 3.2 для детального изучения угловой особенности и погранслойных составляющих строится декомпозиция решения:

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t) + \widetilde{u}(x,t), \ \ U = U_0(x,t) + \varepsilon^2 U_1(x,t),$$
$$V = V_1(x,t) + V_2(x,t),$$

где $U(x,t)$ – регулярная составляющая, $V(x,t)$ – сингулярная часть, состоящая из суммы двух погранслойных функций $V_1(x,t)$ и $V_2(x,t)$, которые, в свою очередь, включают в себя угловые особенности в точках $(0,0)$ и $(l,0)$ соответственно, а $\widetilde{u}(x,t)$ – остаточный член, являющийся достаточно гладким, без угловых особенностей и пограничных слоев.

Для всех компонент этого разложения получены поточечные оценки самих функций и их производных.

Теорема 7. *Для функций $U(x,t)$, $V(x,t)$ и $\widetilde{u}(x,t)$ из вышеприведенного разложения, определенных в $\overline{Q}_T$, при $\alpha \geq 1$, $0 \leq n + 2m \leq 4$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m \geq 0$ справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^{n+m} U}{\partial x^n \partial t^m}\right| \ \leq \ C(1 + \varepsilon^{2-n}),$$
$$\big|V(x,t)\big| = \big|V_1(x,t) \ + \ V_2(x,t)\big| \leq C\, e^{\alpha t}\Big(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{l-x}{\varepsilon}}\Big),$$
$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right| = \varepsilon^4 \left|\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right| \ \leq \ C\Big(1 + \frac{x\varepsilon^{-1}}{t^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon^2 t}} + \frac{(l-x)\varepsilon^{-1}}{t^{3/2}}\, e^{-\frac{(l-x)^2}{4\varepsilon^2 t}}\Big).$$

При доказательстве данной теоремы пользуемся принципом максимума, методом расширения области, а также мотодом функции Грина.

Для остаточного члена справедливы следующие оценки:

$$\big|\widetilde{u}(x,t)\big| \ \leq \ C\, e^{-\frac{l^2}{4\varepsilon^2 t}}, \ \ (x,t) \in \overline{Q}_T,$$
$$\left|\frac{\partial^{n+m} \widetilde{u}}{\partial x^n \partial t^m}\right| \ \leq \ C\big(1 + \varepsilon^{-n} e^{-\frac{l^2}{4\varepsilon^2 t}}\big), \ \ (x,t) \in \overline{Q}_T,$$

Полученные оценки для компонент разложения играют существенную роль при исследовании погрешности численного решения.

В разделе 3.3 строится дискретный аналог декомпозиции из раздела 3.2

$$u_i^j = U_i^j + V_{1,i}^j + V_{2,i}^j + \widetilde{u}_i^j$$

и для каждого ее элемента получаются оценки погрешности, равномерные относительно малого параметра.

В частности, для погрешности регулярной составляющей сеточного решения получена оценка

$$|U_i^j - U(x_i, t_j)| \le CT(\tau + N^{-2} \ln N), \quad (x_i, t_j) \in \overline{\Omega}_{h\tau}. \qquad (22)$$

Аналогичная оценка справедлива и для сеточной аппроксимации остаточного члена.

А для компоненты сеточного решения, отвечающей сингулярной составляющей декомпозиции искомого решения, оценка погрешности получается в два этапа — отдельно в областях пограничных слоев и вне этих областей. Приведем эти оценки для дискретной функции $V_{1,i}^j$, аппроксимирующей погранслойную функцию $V_1(x_i, t_j)$, содержащую также угловую особенность в точке $(0, 0)$.

Лемма 1. *Пусть* $V_{1,i}^j$ *— решение разностной задачи (см. в диссертации (33) при* $k = 1$*), а* $V_1(x, t)$ *— есть решение соответствующей дифференциальной задачи. Тогда вне области пограничного слоя при* $\alpha \ge 2,\ N \ge N_0$ *справедлива оценка погрешности*

$$|V_{1,i}^j - V_1(x_i, t_j)| \le C(1 - \alpha\tau)^{-j} N^{-2}, \quad N/4 \le i \le N,\ 0 \le j \le M. \qquad (23)$$

При доказательстве этой леммы используется оценка для $V_1(x_i, t_j)$ из теоремы 7 и специальная сеточная барьерная функция, учитывающая поведение погранслойной функции.

Лемма 2. *Пусть* $V_{1,i}^j$ *— решение разностной задачи (см. в диссертации (33) при* $k = 1$*), а* $V_1(x, t)$ *— есть решение соответствующей дифференциальной задачи. Тогда в области пограничного слоя справедлива оценка погрешности*

$$|V_{1,i}^j - V_1(x_i, t_j)| \le C\big(\tau + N^{-2} \ln^2 N\big) \ln(j + 1),\ 0 \le i \le \tfrac{N}{4},\ 0 \le j \le M. \quad (24)$$

Доказательство леммы 2 получается путем разбиения погрешности аппроксимации схемы на две части, одна из которых характерезует поведение погрешности вблизи угловой точки, а другая вне конечной окрестности этой точки.

Таким образом, объединяя оценки (22)–(24), получим основной результат третьей главы:

Теорема 8. *Пусть y_i^j – решение исходной разностной задачи, а $u(x,t)$ – решения сингулярно возмущенного варианта дифференциальной задачи (8)–(10), (21). Тогда справедлива оценка погрешности*

$$|y_i^j - u(x_i,t_j)| \leq C\big(\tau + N^{-2}\ln^2 N\big)\ln(j+1), \quad (x_i,t_j) \in \overline{\Omega}_{h\tau}.$$

В разделе 3.4 проводится анализ результатов численного эксперимента.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения, вырождающегося при $\varepsilon = 0$ в уравнение первого порядка по одной из переменных, со смешанными краевыми условиями на сторонах прямоугольника и негладким в окрестностях угловых точек решением доказано, что решение неоднородной монотонной разностной схемы на кусочно-равномерной сетке Шишкина сходится в норме L_∞^h равномерно относительно малого параметра со скоростью $O(N^{-3/2}\ln^2 N)$ для всех $\varepsilon \in (0,1]$, где N – количество узлов сетки в каждом направлении.

2. Доказано, что решение четырехточечной неявной разностной схемы, аппроксимирующей на отрезке начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности при наличии угловой особенности у производных решения, сходится на равномерной сетке к точному решению со скоростью $O(\tau + h^2)\ln(j+1)$, где h – шаг сетки по пространственной переменной, а $t_j = j\tau$ – узлы сетки по временной переменной.

3. Для решения четырехточечной неявной разностной схемы, аппроксимирующей на равномерной по времени и кусочно-равномерной по пространственной переменной сетке Шишкина начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности на отрезке при условии, что входные данные удовлетворяют в угловых точках только условиям согласования нулевого порядка, получена равномерная по малому параметру поточечная оценка погрешности $O(\tau+N^{-2}\ln^2 N)\ln(j+1)$, где N – количество узлов пространственной сетки, а $t_j = j\tau$ – узлы сетки в направлении временной переменной.

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю, профессору Андрееву Владимиру Борисовичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Жемухов У. Х. Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений с улучшенной сходимостью для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с характеристическими слоями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 9. С. 1633-1654.

2. Жемухов У. Х. О сходимости численного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности при наличии угловой особенности у производных решения // Вестн. Моск. ун-та., Серия 15. Вычисл. матем. и киберн., 2013. № 4. С. 9-18.

3. Zhemukhov U. Kh. Uniform Grid Approximation of Nonsmooth Solutions of a Singularly Perturbed Convection - Diffusion Equation with Characteristic Layers // Numerical Analysis and Its Applications (Series: Lecture Notes in Computer Science), V. 8236, P. 562-570, Springer Berlin Heidelberg, 2013.

4. Жемухов У. Х. Равномерная по параметру оценка погрешности неявной четырехточечной разностной схемы для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности с угловыми особенностями // Препринт, ISBN 978-5-317-04584-5, М.: МАКС Пресс 2013, 20 с.

5. Жемухов У. Х. Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений с улучшенной сходимостью для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с характеристическими слоями // Сборник тезисов XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученных «Ломоносов–2011», секция «Вычислительная математика и кибернетика». М., 2011, С. 123-124.

6. Zhemukhov U. Kh. Uniform grid approximation of nonsmooth solutions to singularly perturbed convection-diffusion equation with characteristic layers // The Abstracts of NAA'12: Fifth Conference on Numerical Analysis and Applications, Lozenetz, Bulgaria, Organized by University of Rousse, June 15-20, 2012, P. 59.

7. Жемухов У. Х. Об оценке погрешности численного решения сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности с угловыми особенностями // Сборник тезисов ежегодной научной конференции «Тихоновские чтения», секция «Математическое моделирование и вычислительные методы». М.: МАКС Пресс 2013, С. 42-43.