МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Марков Алексей Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова **Ломов Игорь Сергеевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики **Макин Александр Сергеевич** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова **Разборов Алексей Геннадьевич**
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов, г. Москва

Защита диссертации состоится "25" декабря 2013 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат диссертации разослан "22" ноября 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена изучению вопросов сходимости биортогональных разложений функций для линейных обыкновенных дифференциальных операторов чётного и нечётного порядков с негладкими коэффициентами, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Указанные биортогональные разложения сравниваются с разложением функций в тригонометрический ряд Фурье (ТРФ). Получены оценки скорости равносходимости этих разложений для операторов в скалярном и векторном случаях как на произвольном внутреннем компакте, так и на всём отрезке, выделена зависимость указанных оценок от расстояния компакта до границы интервала.

Актуальность темы. Вопросами сходимости спектральных разложений функций занимались В.А. Стеклов, Я.Д. Тамаркин, М. Стоун, А. Хаар, Б.М. Левитан, Я.Л. Геронимус, В.А. Ильин, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничий, Е.И. Моисеев, А.П. Хромов, В.Б. Лидский, А.А. Шкаликов, Г.В. Радзиевский и другие.

М.В. Келдыш установил теорему о полноте системы корневых векторов и теорему об асимптотических свойствах собственных чисел для широкого класса полиномиальных пучков несамосопряжённых операторов. Эти теоремы привели также к новым сильным результатам для обыкновенных дифференциальных операторов. Работы М.В. Келдыша стимулировали исследования свойств полноты и минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов и разложимости функций в ряды по этим системам, и в настоящее время эти задачи достаточно полно изучены.

В 1975 году В.А. Ильин опубликовал две работы, заложившие основу нового метода исследования свойств собственных и присоединённых функций как самосопряжённых, так и несамосопряжённых дифференциальных операторов (модификация спектрального метода Ильина, разработанного для исследования самосопряжённых эллиптических операторов). Эти работы посвящены вопросам локальной базисности подсистемы корневых функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов и вопросам равносходимости разложений. Новый подход заключался в отказе от рассмотрения конкретных краевых форм оператора. Заменяли их конструктивные и легко проверяемые условия на собственные значения и системы корневых функций, т.е. рассматривались некоторые сужения максимального оператора.

В дальнейшем В.А. Ильиным и его учениками В.Д. Будаевым, Н.Б. Керимовым, А.С. Макиным, И.С. Ломовым, В.М. Курбановым, Л.В. Крицковым, Т.А. Самарской, Е.И. Никольской метод был применён к широкому классу неисследованных ранее обыкновенных и эллиптических операторов, спектральные задачи для которых содержали линейно собственные значения. Получены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в $\mathcal{L}^2(0,1)$ систем корневых функций, локальной базисности и локальной равносходимости биортогональных разложений функций с ТРФ, равносходимости этих разложений на всём отрезке.

В основе метода лежит рассмотрение обобщённых корневых функций оператора, являющихся только регулярными решениями соответствующего дифференциального уравнения со спектральным параметром. Идея такого подхода восходит к А.Н. Тихонову. Используются интегральные представления (формулы среднего значения) для решений этого уравнения. В случае исследования равносходимости разложений из ядра Дирихле выделяется спектральная функция оператора и далее проводится эффективная оценка остатка с использованием априорных оценок корневых функций. Ниже приведён обзор некоторых результатов, имеющих непосредственное отношение к теме диссертации.

При использовании рядов Фурье по системам корневых функций дифференциальных операторов, наряду с вопросами о полноте и базисности этих систем в соответствующих функциональных пространствах возникает задача об оценке скорости сходимости этих рядов к рассматриваемым функциям. Хорошо известны результаты о порядке приближения широких классов функций ортогональными рядами (см. работы Г. Алексича, С.М. Никольского, С.Б. Стечкина, С.А. Теляковского, Б.С. Кашина и А.А. Саакяна). Менее изучены в этом отношении биортогональные ряды, каковыми в основном являются ряды по системам корневых функций несамосопряжённых дифференциальных операторов. Наиболее естественный путь при решении отмеченной задачи – это сравнение разложений функций по исследуемой биортогональной системе и по близкой ей в каком-то смысле и хорошо изученной системе функций.

Начиная с результатов В.А. Стеклова и Ж. Биркгофа, многие работы по разложению по корневым функциям регулярных дифференциальных операторов посвящены тому, чтобы показать, что эти ряды ведут себя строго внутри интервала сходимости как обычные ТРФ (в дополнение к указанным выше отметим также работы по рядам Лежандра и рядам Фурье-Бесселя У. Юнга и М.Л. Гольдмана). Вопрос о скорости равносходимости таких разложений, видимо, впервые был рассмотрен в 1978 году в работах В.А. Ильина и И. Йо, для произвольного неотрицательного самосопряжённого расширения оператора Шрёдингера с потенциалом $q(x) \in \mathcal{L}^r(G), r > 1, G = (0,1)$. Была получена точная оценка $O(1/\lambda)$ скорости равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$ спектрального разложения $\sigma_\lambda(x, f)$ произвольной абсолютно непрерывной функции $f(x)$ с $S_\lambda(x, f)$ – частичной суммой ТРФ этой функции. Этот результат перенесён В.Е. Волковым и И. Йо на несамосопряжённые операторы Шрёдингера с потенциалами из $\mathcal{L}^2$, затем Е.И. Никольской на случай произвольных суммируемых потенциалов, оценка скорости равносходимости $O(\ln \lambda/\lambda)$.

Системы функций, по которым ведётся разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям (или не удовлетворять никаким краевым условиям без спектрального параметра, как в случае системы экспонент), поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке $\overline{G}$ в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценки скорости равносходимости разложений или оценки порядка приближения функций спектральными разложениями именно на всём G, причём оценку достаточно установить в интегральной метрике. В работах И.С. Ломова для произвольного неотрицательного самосопряжённого расширения оператора Шрёдингера с потенциалом из $\mathcal{L}^r(0, 1), r > 1$ для функции ограниченной вариации получена оценка $O(\ln \lambda/\lambda^{1/p})$ скорости равносходимости тех же разложений, но впервые это было сделано на всём интервале G в интегральной метрике $\mathcal{L}^p(G), p \geq 2$; получена оценка порядка приближения функций этими рядами. Этот результат перенесён на несамосопряжённый оператор Шрёдингера, причём получена точная оценка $O(1/\lambda^{1/p})$, и на оператор второго порядка с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной, $p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G), s \geq 1$; оператор L^* для получения оценок не привлекался. Также И.С. Ломов установил оценки скорости равносходимости с ТРФ спектральных разложений по корневым функциям дифференциального оператора произвольного чётного порядка на внутреннем компакте и на всём интервале; отдельно установлена зависимость рассматриваемой скорости равносходимости от расстояния компакта до границы интервала. Схожие вопросы локальной равносходимости для дифференциальных операторов произвольного порядка с негладкими коэффициентами изучались В.М. Курбановым, однако доказательства полученных результатов были им приведены лишь для операторов чётного порядка. В работах С.В. Афонина и И.С. Ломова установлены оценки скорости равносходимости с ТРФ спектральных разложений по корневым функциям дифференциального оператора произвольного нечётного порядка как на внутреннем отрезке, так и на всём интервале.

Приведём ещё ряд близких направлений по спектральной теории дифференциальных операторов. А.С. Макиным получены достаточные условия суммируемости методом Рисса биортогональных рядов. Эти работы продолжили исследования В.А. Ильина и В.В. Тихомирова, посвящённые средним Рисса спектральных разложений. Отметим также работы А.С. Макина, посвящённые изучению базисности систем корневых функций и асимптотики спектра, отвечающих несамосопряжённому оператору Штурма-Лиувилля с регулярными краевыми условиями. В последующих работах он получил значительные результаты по спектральной теории дифференциальных операторов с нерегулярными и вырожденными краевыми условиями. О.В. Белянцевым доказан критерий базисности Рисса для операторов второго порядка с сингулярными коэффициентами.

Обзор результатов по задачам равносходимости, полученных без использования подхода В.А. Ильина, подробно изложен в работах А.П. Хромова. Отметим также работы В.С. Рыхлова.

Г.В. Радзиевский, А.М. Гомилко исследовали оператор, порождённый дифференциальной операцией $y^{(n)}$ со слабым возмущением Fy (соответствующим в случае дифференциального оператора условию $p_1(x)y^{(n-1)} \equiv 0$) и двухточечными регулярными краевыми условиями, возмущёнными интегралами Стилтьеса. В терминах интегрального модуля непрерывности функции $f(x) \in \mathcal{L}(G)$ установлены оценки скорости равномерной равносходимости $\sigma_\lambda(x,f)$ с $S_\lambda(x,f)$ и с $\sigma^0_\lambda(x,f)$ (при $Fy=0$) на $\forall K \subset G$. Система, биортогонально сопряжённая с системой корневых функций оператора L, является системой корневых функций оператора L^*. Отдельно Г.В. Радзиевским был рассмотрен дифференциальный оператор $n-$го порядка (с $p_1(x)y^{(n-1)} \equiv 0$) с двухточечными регулярными краевыми условиями. Исследовано влияние краевых условий (наличие или отсутствие в них производных) на оценку скорости сходимости разложений по корневым функциям этого оператора в метрике $\mathcal{L}^p(G)$.

В.А. Винокуров и В.А. Садовничий опубликовали серию статей по асимптотике любого порядка собственных значений и собственных функций первой краевой задачи для оператора Штурма-Лиувилля на отрезке с лишь суммируемым потенциалом и потенциалом, содержащим $\delta-$функции. Получены формулы следов; для первой краевой задачи доказана теорема о равномерной равносходимости разложений по собственным функциям с ТРФ на всём отрезке для суммируемой разлагаемой функции. Близкие вопросы для операторов с сингулярными потенциалами исследовали А.А. Шкаликов и А.М. Савчук, а также И.В. Садовничая. Эти исследования активно развиваются и в настоящее время.

Цель работы. В диссертации изучаются вопросы сходимости биортогональных разложений функций для линейных обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка с негладкими коэффициентами, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Указанные биортогональные разложения сравниваются с разложением функций в тригонометрический ряд Фурье.

Основные результаты работы.

1. Получены оценки скорости равносходимости спектральных разложений функций для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с разложением этих функций в тригонометрический ряд Фурье на произвольном внутреннем компакте основного интервала как в скалярном, так и в матричном случае. При этом установлена зависимость оценки скорости локальной равносходимости от расстояния внутреннего компакта до границы интервала.

2. Получены оценки скорости сходимости и оценки скорости равносходимости спектральных разложений функций для дифференциального оператора произвольного порядка с разложением этих функций в тригонометрический ряд Фурье на всём основном интервале как в скалярном, так и в матричном случае.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, общие методы комплексного и функционального анализа, а также спектральный метод В.А. Ильина.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других, приводящих к изучению несамосопряжённых операторов. Также результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов по спектральной теории дифференциальных операторов для студентов и аспирантов математических и физических специальностей университетов.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Апробация результатов работы. Результаты настоящей диссертации были представлены в виде докладов на XV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2008 г.); научной конференции «Ломоносовские чтения» (2012 г.); научном семинаре кафедры общей математики.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, 3 из которых в изданиях, рекомендованных ВАК ([5], [6], [7]).

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации 135 страниц. Список литературы содержит 103 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проводится общий обзор исследований, связанных с темой диссертационной работы, раскрываются её цели и задачи, а также приводится краткое изложение результатов диссертации.

В **первой главе** вводятся основные понятия, определения и леммы, используемые в диссертации. Далее рассматриваются 4 оператора, заданные на любом внутреннем компакте $K \subset G$.

Рассмотрим оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + p_1(x)u' + q_1(x)u, \quad x \in G = (0, 1), \tag{1}$$

на классе функций D – абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной;

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \quad s > 1, \quad q_1(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \tag{2}$$

корневые функции оператора L (собственные и присоединёные функции) понимаются в обобщённом (по В.А. Ильину) смысле.

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую этим собственным значениям, пусть $\{v_k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u_k\}$ система функций.

Сформулируем основные ограничения на корневые системы (на оператор L).

Определение 1. *Под собственной функцией оператора L, отвечающей собственному значению $\lambda^2 \in \mathcal{C}$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l\overset{\circ}{u} + \lambda^2 \overset{\circ}{u} = 0$.*

Определение 2. *Под присоединённой функцией порядка $m, m = 1, 2, ...$, отвечающей тому же λ^2 и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $l\overset{m}{u} + \lambda^2 \overset{m}{u} = \mu_m \overset{m-1}{u}$, где либо $\mu_m = 1$ (задача 1), либо $\mu_m = \lambda, Re\,\lambda \geq 0$, при $|\lambda| \geq 1$ и $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (задача 2).*

Потребуем, чтобы рассматриваемые системы $\{\lambda_k\}, \{u_k(x), v_k(x)\}$ удовлетворяли *трём условиям Ильина* (назовём их *Условия А*):

1) система $\{u_k\}$ замкнута и минимальна в $\mathcal{L}^r(G)$ при некотором $r \in [1, \infty)$;

2) существуют $c_1, c_2 = const > 0$ такие, что

$$|Im\,\lambda_k| \leq c_1,\ \forall k; \qquad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2,\ \forall \lambda \geq 0;$$

3) существует $c_3 = const > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \|v_k\|_{r'} \leq c_3,\ \forall k,$$

где $v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G), r' = r/(r-1)$, через $\|\cdot\|_r$ обозначается норма в $\mathcal{L}^r(G)$.

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^r(G), r \in [1, \infty)$, составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| < \lambda} f_k u_k(x), \quad \lambda > 0, \quad f_k = (f, v_k).$$

Пусть $\|\cdot\|_{r,K}$ – норма в $\mathcal{L}^r(K)$, $K \subset G$. Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму ТРФ функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице.

Выпишем используемые в диссертации условия на асимптотику коэффициентов f_k:

$$\exists \nu = const > 0, \beta = const: \qquad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu} \ln^{-\beta} |\lambda_k|),\ |\lambda_k| > 1; \qquad (3)$$

$$\exists \nu = const > 0: \qquad \alpha^k f^k = O(\lambda_k^{-\nu}), \qquad (4)$$

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}$. Предполагаем, что для оператора L_0 эти условия в соответствующих утверждениях выполняются.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$. Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \rho(K, \partial G) > 0$ – расстояние до границы интервала G. Сформулируем основной результат. Будут рассмотрены три ситуации. В каждой из них выписываются по две оценки скорости равносходимости. Это связано с тем, что было установлено: если стремиться получить наилучшую оценку скорости равносходимости по параметру λ, то загрубляется оценка по параметру η и наоборот, если оптимизировать оценку по η, при этом она улучшается на порядок, то ухудшается оценка по λ.

Теорема 1. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1), (2), (3) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$1). \quad \Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda} + \\ +\|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{\|q_1\|_1 \ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}\ln^\beta\lambda} + \\ \|p_1\|_s \max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right)\Bigg], \end{cases} \tag{5}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае.
2). Если $s = \infty$, т.е. $p_1(x) \in \mathcal{L}^\infty(G)$, то

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda} + n_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \|p_1\|_\infty \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{\|p_1\|_\infty}{\lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right). \end{cases} \tag{6}$$

3). Пусть $lu = u''$ и дополнительно к условиям теоремы система $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^\alpha(G)$ для какого-либо числа $\alpha \in [1,\infty)$ (то есть $\forall f(x) \in \mathcal{L}^\alpha(G), \forall K \subset G: \ \|\sigma_\lambda(x,f) - f(x)\|_{\alpha,K} \to 0$ при $\lambda \to \infty$), тогда можно записать равномерные оценки

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{C(K)} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{n_1}{\lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right)\Bigg]. \end{cases} \tag{7}$$

Постоянные $c > 0$ в оценках (5) – (7) не зависят от λ и η.

Аналогичные оценки скорости равносходимости получены для оператора произвольного чётного порядка, заданного операцией

$$l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} p_l(x)\frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0,1), \quad n > 1;$$
$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G,\mathcal{C}), \quad s > 1, \quad p_l(x) \in \mathcal{L}(G,\mathcal{C}), \quad l = \overline{2,2n}, \tag{8}$$

на классе функций D_{2n}, абсолютно непрерывных на $\overline{G}$ вместе со своими производными до $(2n-1)-$го порядка.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие Условиям А. Присоединённые функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная"оценка

$$\| \overset{m-1}{u_k} \|_{r_0} \leq c\alpha_\lambda \| \overset{m}{u_k} \|_{r_0}, \quad c = const > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \tag{9}$$

c не зависит от λ_k, $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Пусть также

$$\|u_k\|_\infty \leq c\|u_k\|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = const > 0. \tag{10}$$

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (8) – (10) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \leq$$
$$\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0 \ln\lambda}{\lambda^\nu}\Bigg] \end{cases} \tag{11}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ, $m_0 = \max m_k$; если при этом $p_1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{\infty,K} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0}{\lambda^\nu}\right], \\ \frac{c}{\eta}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right]. \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (8) – (10), и Условия А. Тогда для всех достаточно больших*

чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \\ +\|p_1\|_s \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \\ +\|p_1\|_s \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s} \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p} \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1} \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg] \end{cases} \tag{13}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ, $m_0 = \max m_k$; если при этом $p_1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{\infty,K} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|p_l\|_1 \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg) + \frac{m_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\Bigg]. \end{cases} \tag{14}$$

Результаты, полученные для оператора второго и произвольного чётного порядка, перенесены на случай операторов с матричными коэффициентами.

Рассмотрим оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$lu = u'' + P(x)u' + Q(x)u, \quad x \in G = (0,1),$$

где

$$\begin{aligned} P(x) = \{P_{ij}(x)\},\ P_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G,\mathcal{C}),\ s > 1,\ \ i,j = \overline{1,h}, \\ Q(x) = \{Q_{ij}(x)\},\ Q_{ij}(x) \in \mathcal{L}(G,\mathcal{C}), \\ u = (u_1(x), u_2(x), ..., u_h(x)),\ u_j(x) \in D,\ j = \overline{1,h}, \end{aligned} \tag{15}$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своей первой производной.

Фиксируем произвольное число $p \in [1,\infty)$, произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и систему $\{u^k(x)\}$, $u^j(x) = (u_1^j(x), u_2^j(x), ..., u_h^j(x))$

корневых вектор-функций оператора L, отвечающую этим собственным значениям. Пусть существует $\{v^k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u^k\}$ система функций. Для произвольной вектор-функции $f(x) \in \mathcal{L}_p^h(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma^\lambda(x,f) = \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u^k(x), \ \lambda > 0,$$

$u^k \in \mathcal{L}_p^h(G), \ v^k \in \mathcal{L}_q^h(G), \ p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для каждого $j = 1, 2, .., h$ рассмотрим $j-$ую компоненту биортогонального разложения:

$$\sigma_j^\lambda(x,f) = \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} \langle f, v^k \rangle \cdot u_j^k(x).$$

Через $S^\lambda(x, f_j)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье соответствующей $j-$ой компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f_j(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в нуле и единице:

$$S^\lambda(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\sin \lambda (x-y)}{(x-y)} f_j(y)\, dy.$$

Теорема 4. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (15) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$1). \quad \Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x,f) - S^\lambda(x,f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \le$$

$$\le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda} + \\ + \|P(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1 \ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}\ln^\beta\lambda} + \\ + \|P(x)\|_s \max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{n_1 \ln^2 \lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right)\Bigg], \end{cases} \tag{16}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае;
2). Если $s = \infty$, то

$$\Delta_j^\lambda \le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + n_1 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\|P(x)\|_\infty \ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\right) + \frac{\|P(x)\|_\infty}{\lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right), \end{cases} \tag{17}$$

для всех $j = \overline{1,m}$. Постоянные $c > 0$ в оценках (16) и (17) не зависят от λ и η.

Теорема 5. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (15) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$1). \quad \Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Big[\max\Big(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\Big) + \frac{n_1}{\lambda} + \|Q(x)\|_1 \max\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}\Big) + \\ + \|P(x)\|_s \max\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Big)\Big], \\ \frac{c}{\eta}\Big[\max\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big) + \frac{n_1}{\lambda^\nu} + \|Q(x)\|_1 \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}} + \\ + \|P(x)\|_s \max\Big(\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Big)\Big], \end{cases} \tag{18}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае;
2). Если $s = \infty$, то

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Big[\max\Big(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\Big) + \frac{n_1}{\lambda} + \frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda} + \|P(x)\|_\infty \max\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big)\Big], \\ \frac{c}{\eta}\max\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big), \end{cases} \tag{19}$$

для всех $j = \overline{1,m}$. Постоянные $c > 0$ в оценках (18) и (19) не зависят от λ и η.

Рассмотрим оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$\begin{gathered} L \equiv lu, \; l = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{l=1}^{2n} P^l(x)\frac{d^{2n-l}}{dx^{2n-l}}, \quad x \in G = (0,1), \quad n > 1; \\ P^1(x) = \{P^1_{ij}(x)\}, \; P^1_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}), \; \forall i,j = \overline{1,h}, \; s > 1, \\ P^l(x) = \{P^l_{ij}(x)\}, \; P^l_{ij}(x) \in \mathcal{L}(G, \mathcal{C}), \; \forall i,j = \overline{1,h}, \; \forall l = \overline{2,2n}, \end{gathered} \tag{20}$$

где $u = (u_1(x), u_2(x), ..., u_h(x))$, $u_j(x) \in D_{2n}$, $j = \overline{1,h}$, а класс D_{2n} – абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своими производными до $(2n-1)-$го порядка включительно функции.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1,\infty]$, $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u^k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие Условиям А. Присоединённые функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная"оценка

$$\| \overset{m-1}{u^k} \|_{\mathcal{L}^h_{r_0}(G)} \leq c\alpha_\lambda \| \overset{m}{u^k} \|_{\mathcal{L}^h_{r_0}(G)}, \quad c = const > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \tag{21}$$

c не зависит от λ_k, $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Пусть также

$$\|u^k\|_{\mathcal{L}^h_\infty(G)} \leq c\|u^k\|_{\mathcal{L}^h_{r_0}(G)} \quad \forall k; \quad c = const > 0. \tag{22}$$

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 6. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (20) – (22) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \leq$$
$$\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \|P^1\|_{\mathcal{L}^h_s(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}^h_1(K)} \max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \|P^1\|_{\mathcal{L}^h_s(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}^h_1(K)} \max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Bigg] \end{cases} \tag{23}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ, $m_0 = \max m_k$; если при этом $P^1 \equiv 0$, то

$$\|\sigma_j^\lambda(x, f) - S^\lambda(x, f_j)\|_{\mathcal{L}_\infty(K)} \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0}{\lambda^\nu}\right], \\ \frac{c}{\eta}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu} + \frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right]. \end{cases} \tag{24}$$

Теорема 7. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (20) – (22) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших*

чисел λ *и любого отрезка* $K \subset G$ *справедливы следующие оценки.*

$$\Delta_j^\lambda \le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \\ +\|P^1\|_{\mathcal{L}_s(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \\ +\|P^1\|_{\mathcal{L}_s(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg] \end{cases} \tag{25}$$

с постоянной c, *не зависящей от* η *и* λ, $m_0 = \max m_k$; *если при этом* $P^1 \equiv 0$, *то*

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f_j)\|_{\mathcal{L}_\infty(K)} \le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{m_0}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \\ + \sum\limits_{l=2}^{2n} \|P^l\|_{\mathcal{L}_1(K)} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right) + \frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg]. \end{cases} \tag{26}$$

Во **второй главе** получены те же оценки, что и в первой, но уже для оператора первого и произвольного нечётного порядка. Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + a_0(x)u, \qquad x \in G = (0,1),\ a_0(x) \in L^s(G), \qquad s > 1 \tag{27}$$

на классе функций D, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0,1]$.

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую этим собственным значениям, удовлетворяющие трём Условиям А.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 8. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (27) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \leq$$
$$\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|a_0\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. +\|a_0\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right)\right], \\ \frac{c}{\eta}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|a_0\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \right. \\ \left. +\|a_0\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right)\right], \end{cases} \tag{28}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η.

Теорема 9. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (27) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\right) + (n_1 + \|a_0\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\right) + \right. \\ \left. +\|a_0\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}\right)\right], \\ \frac{c}{\eta}\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\right) + (n_1 + \|a_0\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\right) + \right. \\ \left. +\|a_0\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}\right)\right], \end{cases} \tag{29}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u_k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η.

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)u^{(k)}(x),\ x \in G = (0,1),\ n = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z},\ l \geq 0;$$
$$a_{n-1}(x) \in L^s(G),\ s > 1,\ a_k(x) \in L(G),\ k = \overline{0, n-2}, \tag{30}$$

на классе функций D_n, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно.

Зафиксируем некоторые числа $r_0 \in [1,\infty)$, $\quad \gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L, отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям A.

Присоединённые функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная"оценка

$$\| \overset{m-1}{u}_k \|_{r_0} \le c\alpha_\lambda \| \overset{m}{u}_k \|_{r_0}, \quad c = const > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \tag{31}$$

c не зависит от λ_k, $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для $n \ge 3$ такую систему всегда можно построить. Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_\infty \le c\|u_k\|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = const > 0. \tag{32}$$

Фиксируем произвольное $p \in [1,\infty)$.

Теорема 10. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (30) – (32) и Условия A. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \le$$
$$\le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \|a_{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \\ + \sum\limits_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \|a_{n-1}\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \\ + \sum\limits_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right)\Bigg] \end{cases} \tag{33}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ, $m_0 = \max m_k$.

Теорема 11. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (30) – (32) и Условия A. Тогда для всех достаточно больших*

чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\Bigg(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Bigg) + \\ + \|a_{n-1}\|_s \max\Bigg(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg) + \\ + \sum\limits_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\Bigg(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Bigg) + \\ + \|a_{n-1}\|_s \max\Bigg(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg) + \\ + \sum\limits_{q=0}^{n-2} \|a_q\|_1 \frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0 \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}\Bigg)\Bigg] \end{cases} \tag{34}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ, $m_0 = \max m_k$.

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + A(x)u, \qquad x \in G = (0,1),$$

где

$$\begin{gathered} A(x) = \{A_{ij}(x)\},\ A_{ij}(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathcal{C}),\ s > 1,\ i,j = \overline{1,h}, \\ u = (u_1(x), u_2(x), ..., u_h(x)),\ u_j(x) \in D,\ j = \overline{1,h}, \end{gathered} \tag{35}$$

класс D – функции, абсолютно непрерывные на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своей первой производной.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$, произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и систему $\{u^k(x)\}$, $u^j(x) = (u_1^j(x), u_2^j(x), ..., u_h^j(x))$ корневых вектор-функций оператора L, отвечающую этим собственным значениям. Пусть существует $\{v^k(x)\}$ – биортогонально сопряжённая с $\{u^k\}$ система функций.

Фиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$.

Теорема 12. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (35) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ*

и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x,f) - S^\lambda(x,f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \leq$$
$$\leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^n u}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \\ +\|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}\right)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^n u}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu \ln^\beta \lambda}\right) + \\ +\|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}\right)\Bigg], \end{cases} \tag{36}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η.

Теорема 13. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (35) и Условия A. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_j^\lambda \leq \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \\ +\|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + (n_1 + \|A(x)\|_p)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \\ +\|A(x)\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right)\Bigg], \end{cases} \tag{37}$$

где $n_1 = 1$, если общее число присоединённых функций в системе $\{u^k\}$ бесконечно и $n_1 = 0$ в противном случае. Постоянная $c > 0$ не зависит от λ и η.

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} A^k(x)u^{(k)}(x),\ x \in G = (0,1),\ n = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z},\ l \geq 0;$$
$$A^{n-1}(x) = \{A_{ij}^{n-1}(x)\},\ A_{ij}^{n-1}(x) \in \mathcal{L}^s(G,\mathcal{C}),\ s > 1, \forall i,j = \overline{1,h},$$
$$A^k(x) = \{A_{ij}^k(x)\},\ A_{ij}^k(x) \in \mathcal{L}(G,\mathcal{C}),\ k = \overline{0,n-2}, \tag{38}$$

где $u=(u_1(x),u_2(x),...,u_h(x))$, $u_j(x)\in D_n$, $j=\overline{1,h}$, а класс D_n – абсолютно непрерывные на $\overline{G}=[0,1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно.

Зафиксируем некоторые числа $r_0\in[1,\infty)$, $\gamma_0>0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u^k\}$ корневых вектор-функций оператора L, отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трём Условиям А.

Присоединённые функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная"оценка

$$\| \overset{m-1}{u}_k \|_{\mathcal{L}^h_{r_0}(G)} \le c\alpha_\lambda \| \overset{m}{u}_k \|_{\mathcal{L}^h_{r_0}(G)}, \quad c=const>0, \quad m=\overline{1,m_k}, \tag{39}$$

c не зависит от λ_k, $\alpha_\lambda=|\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda=1$ для задачи 2. Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^h_\infty(G)} \le c\|u_k\|_{\mathcal{L}^h_{r_0}(G)} \quad \forall k; \quad c=const>0. \tag{40}$$

Фиксируем произвольное $p\in[1,\infty)$.

Теорема 14. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (4), (38) – (40) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K\subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x,f)-S^\lambda(x,f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \le$$
$$\le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{1}{\lambda^\nu},\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right)+\|A^{n-1}\|_s\max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right)+ \\ +\sum\limits_{q=0}^{n-2}\|A^q\|_1\frac{1}{\lambda^{1/p}}+m_0\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu},\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right)+\|A^{n-1}\|_s\max\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right)+ \\ +\sum\limits_{q=0}^{n-2}\|A^q\|_1\frac{1}{\lambda^{1/p}}+m_0\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}\right)\Bigg] \end{cases} \tag{41}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ, $m_0=\max m_k$.

Теорема 15. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (38) – (40) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших*

чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\Delta_j^\lambda \le \begin{cases} \frac{c}{\eta^2}\Bigg[\max\Bigg(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu \ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Bigg)+ \\ +\|A^{n-1}\|_s \max\Bigg(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\Bigg)+ \\ +\sum\limits_{q=0}^{n-2}\|A^q\|_1\frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\Bigg)\Bigg], \\ \frac{c}{\eta}\Bigg[\max\Bigg(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Bigg)+ \\ +\|A^{n-1}\|_s \max\Bigg(\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\Bigg)+ \\ +\sum\limits_{q=0}^{n-2}\|A^q\|_1\frac{1}{\lambda^{1/p}} + m_0\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\Bigg)\Bigg] \end{cases} \tag{42}$$

с постоянной c, не зависящей от η и λ.

Третья глава посвящена получению оценок скорости равносходимости спектральных разложений для дифференциальных операторов второго и произвольного чётного порядков на основном интервале. Рассматриваются случаи одномерного оператора, а также оператора, порождённого дифференциальной операцией с матричными коэффициентами.

Теорема 16. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1) – (3) и Условия A. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:*

$$\begin{aligned} &\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_p \le \max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\rho'}\Bigg) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda}+ \\ &+\|p_1\|_s\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}\ln^\beta\lambda}\Bigg) + m_0\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right), \end{aligned} \tag{43}$$

где $m_0 = \max m_k$, $\rho = \max(2, p, s')$ постоянная $c > 0$ не зависит от λ.

Следствие 1. Пусть $p \in [1,\infty)$, $f \in V(G)$ и выполняются условия предыдущей Теоремы. Тогда

$$\begin{aligned} &\|f - \sigma_\lambda(x,f)\|_p = O\Bigg[\max\Bigg(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'}\ln^\beta\lambda}, \frac{\ln^{1/\rho'}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\rho'}\Bigg) + \frac{\|q_1\|_1}{\lambda}+ \\ &+\|p_1\|_s\max\Bigg(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}\ln^\beta\lambda}\Bigg) + m_0\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{44}$$

Теорема 17. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (8) – (10) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:*

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_p\le\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'}\ln^\beta\lambda},\frac{\ln^{1/\rho'}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right)+\|p_1\|_s\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/s'}},\right.$$
$$\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}},\frac{1}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}\ln^\beta\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda},\frac{\ln^{1/Q}\lambda}{\lambda^{1/s'}\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1/Q},$$
$$\left.\frac{\ln^{1+1/Q}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/Q-1/s'}\right)+\sum_{l=2}^{2n}\|p_l\|_1\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}},\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1-1/p}\right)+\frac{m_0}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda} \tag{45}$$

с постоянной c, не зависящей λ, $m_0=\max m_k,\rho=\max(2,p,s')$, $Q=\min(\rho',s')=\min(q,s,s')$.

Следствие 2. Пусть $p\in[1,\infty), f\in V(G)$ и выполняются условия предыдущей Теоремы. Тогда

$$\|f-\sigma_\lambda(x,f)\|_p=O\left[\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}},\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'}\ln^\beta\lambda},\frac{\ln^{1/\rho'}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right)+\right.$$
$$+\|p_1\|_s\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/s'}},\frac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}},\frac{1}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}\ln^\beta\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda},\right.$$
$$\left.\frac{\ln^{1/Q}\lambda}{\lambda^{1/s'}\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1/Q},\frac{\ln^{1+1/Q}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/Q-1/s'}\right)+\sum_{l=2}^{2n}\|p_l\|_1\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}},\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1-1/p}\right)+$$
$$\left.+\frac{m_0}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right]. \tag{46}$$

Теорема 18. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (15) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:*

$$\Delta_j^\lambda\equiv\|\sigma_j^\lambda(x,f)-S^\lambda(x,f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)}\le\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'}\ln^\beta\lambda},\frac{\ln^{1/\rho'}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right)+$$
$$+\frac{\|Q(x)\|_1}{\lambda}+\|P(x)\|_s\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/\rho-1/s}\ln^\beta\lambda}\right)+m_0\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda}\right), \tag{47}$$

где $m_0=\max m_k$, $\rho=\max(2,p,s')$ постоянная $c>0$ не зависит от λ.

Теорема 19. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (20) – (22) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших*

чисел λ справедлива следующая оценка:

$$\Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x,f) - S^\lambda(x,f_j)\|_{\mathcal{L}_p(K)} \le \max\left(\tfrac{1}{\lambda}, \tfrac{1}{\lambda^{\nu-1/\rho'}\ln^\beta\lambda}, \tfrac{\ln^{1/\rho'}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\rho'}\right)+$$
$$+\|P_1\|_s \max\left(\tfrac{1}{\lambda^{1/s'}}, \tfrac{1}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}, \tfrac{1}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}\ln^\beta\lambda}, \tfrac{\ln\lambda}{\lambda}, \tfrac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/s'-1/Q}}, \tfrac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}\ln^\beta\lambda},\right.$$
$$\left.\tfrac{\ln^{1/Q}\lambda}{\lambda^{1/s'}\ln^\beta\lambda}\Bigg|_{\nu=1/Q}, \tfrac{\ln^{1+1/Q}\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Bigg|_{\nu=1+1/Q-1/s'}\right) + \sum_{l=2}^{2n}\|P_l\|_1 \max\left(\tfrac{1}{\lambda^{1/p}}, \tfrac{\ln\lambda}{\lambda}, \tfrac{\ln^2\lambda}{\lambda\ln^\beta\lambda}\Big|_{\nu=1-1/p}\right)+$$
$$+\tfrac{m_0}{\lambda^\nu\ln^\beta\lambda} \tag{48}$$

с постоянной c, не зависящей λ, $m_0 = \max m_k, \rho = \max(2,p,s')$, $Q = \min(\rho',s') = \min(q,s,s')$.

Четвёртая глава посвящена получению оценок скорости равносходимости спектральных разложений для дифференциальных операторов произвольного нечётного порядка на основном интервале. Рассматриваются случаи одномерного оператора, а также оператора, порождённого дифференциальной операцией с матричными коэффициентами. Фиксируем произвольное $p \in [1,\infty)$.

Теорема 20. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (30) – (32) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:*

$$\Delta_\lambda \equiv \|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_p \le c\max\left[\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}\ln^\beta\lambda}\right] \tag{49}$$

с постоянной c, не зависящей от λ, $\delta = \min(2,q,s)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Теорема 21. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (3), (38) – (40) и Условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива следующая оценка:*

$$\Delta_j^\lambda \equiv \|\sigma_j^\lambda(x,f) - S^\lambda(x,f_j)\|_p \le c\max\left[\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}\ln^\beta\lambda}\right] \tag{50}$$

с постоянной c, не зависящей от λ, $\delta = \min(2,q,s)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Игорю Сергеевичу Ломову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Марков А.С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциального оператора на скорость равносходимости спектральных разложений // XV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных Ломоносов-2008, секция Вычислительная математика и кибернетика. Тезисы докладов, М.: Изд-во МГУ. 2008. С. 60.

[2] *Марков А.С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциального оператора на скорость равносходимости спектральных разложений // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ. 2008. Вып. 5. С. 68-72.

[3] *Марков А.С.* О скорости сходимости спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ. 2009. Вып. 6. С. 111-127.

[4] *Марков А.С.* О скорости сходимости спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2009 года. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ. 2009. С. 50.

[5] *Марков А.С.* Оценки скорости равносходимости спектральных разложений на отрезке // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1105-1116.

[6] *Ломов И.С., Марков А.С.* Оценки скорости сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов чётного порядка // ДАН. 2012. Т. 445, № 5. С. 510-512.

[7] *Ломов И.С., Марков А.С.* Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов чётного порядка // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 557-563.

[8] *Марков А.С.* Исследование скорости сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов // Деп. в ВИНИТИ 24.10.2013 № 292-В2013.