Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

на правах рукописи

ГАЛАНИНА Анна Михайловна

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О Т-СЛОЕ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор $\boxed{\textbf{Фаворский Антон Павлович}}$ доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова **Мухин Сергей Иванович**
Официальные оппоненты:	**Попов Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры автоматизации научных исследований, федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова» **Змитренко Николай Васильевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий сектором, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»
Ведущая организация:	федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук»

Защита состоится 4 декабря в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова по адресу 119992, Москва, Ломоносовский проспект, 27.

Автореферат разослан 1 ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.43 доктор физико-математических наук, профессор — Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В математическом моделировании для описания сплошной среды (газ, жидкость, плазма и др.) чаще всего используются модели, приводящие к дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям. Важный класс задач представляют собой системы уравнений гиперболического типа. С решением уравнений гиперболического типа тесно связаны такие прикладные задачи, как расчет движения сжимаемого газа, описание явлений магнитной гидродинамики, решение астрофизических проблем, задачи теории „мелкой воды“ и химической сорбции, проблемы теории поверхностей. В силу нелинейности уравнений, встречающихся в моделях перечисленных явлений, основным способом решения и исследования систем этого типа являются численные методы.

Существует большое число различных методов численного решения гиперболических уравнений. Новые алгоритмы продолжают появляться и в настоящее время. Это связано, во-первых, с важностью и широтой применения гиперболических уравнений в математическом моделировании различных процессов. Во-вторых, в силу особенностей этих уравнений, к методам их решения предъявляются высокие требования, порой вступающие в противоречие друг с другом. Поэтому оптимального со всех точек зрения алгоритма нет, и все новые численные методы будут появляться.

Решения нелинейных гиперболических уравнений (в отличии от линейных) часто обладают свойством неограниченного возрастания производных со временем, что называется градиентной катастрофой. В результате даже при сколь угодно гладких начальных данных решение может оставаться гладким и, соответственно, классическим лишь в течение ограниченного отрезка времени. Построение методов расчета разрывных решений представляет собой особую проблему при решении гиперболических уравнений. Важнейший шаг в этом направлении сделали фон Нейман и Рихтмайер, которые впервые в 1950 г. предложили схему для расчета течений с разрывами.

В силу свойства гиперболических уравнений порождать разрывы и описывать их движение одним из главных требований, предъявляемых к методам решения гиперболических уравнений, является правильное воспроизведении поведения решения в тех областях, где оно претерпевает сильные изменения во времени и пространстве, в частности, на ударных волнах и контактных разрывах. В связи с этим одним из важнейших свойств численных методов является монотонность.

На сегодняшний день существует достаточно большое количество методов решения гиперболических уравнений, в частности, уравнений газовой динамики. Для обеспечения монотонности решения в большинстве схем используются разного года лимитеры и регуляризаторы. Однако такой способ приводит к усложнению алгоритма и большим вычислительным затратам и зачастую к значительным ограничениям на шаги сетки.

Проблемой решения гиперболических уравнений, в частности, уравнений газовой динамики, занимались такие учёные, как Courant R., Einfeldt B., Friedrichs K.O., Harten A., Isaacson E., Lax P.D., Osher S., Rees M., Roe P.L., von Neumann J., Wendroff B., Белоцерковский О.М., Годунов С.К., Головизнин В.М., Кузнецов О.А., Попов Ю.П., Рождественский Б.Л., Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Яненко Н.Н. Их работы послужили важным и ценным источником для выполнения данной диссертации.

Правильное решение задач гиперболического типа позволяет получить практически важные результаты в прикладных задачах. К таким задачам относится, в частности, моделирование эффектов Т-слоя. Эффект Т-слоя обнаружен в 60-х годах прошлого века в результате чисто теоретических исследований и вычислительного эксперимента группой ученой во главе с А.Н. Тихоновым (Самарский А.А., Заклязьминский Л.А., Волосевич П.П., Дегтярев Л.М., Курдюмов С.П., Попов Ю.П., Соколов В.С., Фаворский А.П.). Позднее появились факты, экспериментально подтверждающие существование эффекта Т-слоя. Т-слой представляет собой высокотемпературное самоподдерживающееся образование, возникающее и развивающееся в плазме при определенных условиях в процессе ее взаимодействия с магнитным полем. Исследование Т-слоя является актуальной прикладной задачей, поскольку условия его возникновения по-прежнему до конца не изучены.

Основной целью исследования является разработка алгоритма численного решения систем уравнений гиперболического типа на примере решения одномерной и двумерной систем уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа и в переменных Эйлера, его программная реализация и применение построенного алгоритма к исследованию методом вычислительного эксперимента двумерной магнитогидродинамической задачи о возникновении и развитии Т-слоя.

Для достижения поставленной цели в работе решены следующие **основные задачи**:

1. построение и исследование консервативной однородной монотонной разностной схемы для решения линейного уравнения переноса;

2. построение и исследование консервативной однородной монотонной разностной схемы для решения квазилинейного уравнения переноса;

3. построение и исследование методом вычислительного эксперимента, в том числе сравнением с существующими схемами, консервативного однородного монотонного алгоритма решения одномерных уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа;

4. построение и исследование методом вычислительного эксперимента алгоритма решения одномерных и двумерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера с использованием локальных лагранжевых координат;

5. построение численного метода решения двумерной системы МГД уравне-

ний;

6. реализация построенных численных алгоритмов в виде программы для решения соответствующих уравнений;

7. исследование в рамках идеальной магнитной гидродинамики методом вычислительного эксперимента двумерной задачи о возникновении и развитии Т-слоя с помощью разработанных численных алгоритмов.

Методы исследования. Основными методами решения поставленных задач являются методы вычислительной математики, механики сплошных сред, математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Достоверность и обоснованность. Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждаются сравнением с точными решениями математических задач, с данными вычислительных экспериментов, выполненных известными численными методами, а также строгостью используемого математического аппарата, обоснованностью используемых математических моделей и принципов построения разностных схем.

Положения, выносимые на защиту:

1. метод численного решения уравнения переноса в одномерном случае;

2. метод численного решения уравнений газовой динамики и уравнений магнитной гидродинамики в двумерном случае;

3. МГД математическая модель образования и развития Т-слоя в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля; условия образования и развития Т-слоя в зависимости от параметров магнитного поля, скорости течения и геометрических характеристик возмущения.

Научная новизна. Работа посвящена разработке нового метода численного решения линейного и квазилинейного уравнений переноса, нового метода численного решения систем уравнений газовой динамики в одномерном случае в переменных Лагранжа и в переменных Эйлера, в двумерном случае в эйлеровых координатах, а также уравнений магнитной гидродинамики в двумерном случае.

Предлагаемая схема, основанная на кусочно-линейной реконструкции сеточной функции в пределах ячейки расчётной сетки и существенно использующая характеристические свойства гиперболической системы уравнений, позволяет обеспечить монотонность решения без использования искусственных регуляризаторов. Проведенное исследование построенной схемы в случае линейного уравнения переноса показало, что схема монотонна и имеет второй порядок аппроксимации на участках монотонности решения (оба утверждения доказаны аналитически). В случае квазилинейного уравнения переноса и уравнений газовой динамики проведено апостериорное исследование погрешности аппроксимации и свойства монотонности.

Проведено сравнение численных результатов, полученных с помощью предложенного алгоритма и с помощью известных методов решения соответствующих задач. Так, для линейного уравнения переноса проведено сравнение результатов численного решения с помощью сконструированной сплайн-схемы с численным решением, полученным по схеме Лакса-Вендроффа. Для квазилинейного уравнения переноса сравнение проведено с монотонизированной схемой К.И. Бабенко (схемой „квадрат“). Квазиакустическая схема для решения уравнений газовой динамики сравнивалась со схемой Роу-Эйнфельдта-Ошера повышенного порядка аппроксимации.

Сконструированный алгоритм успешно применен к исследованию методом вычислительного эксперимента прикладной задачи о возникновении и развитии Т-слоя в потоке слабопроводящего газа в магнитном поле. Получены условия возникновения Т-слоя в зависимости от начальной скорости потока, величины напряженности магнитного поля и геометрических характеристик возмущения. Показано, что основным параметром, определяющим возможность возникновения Т-слоя, является параметр магнитогидродинамического взаимодействия.

Теоретическая и практическая значимость. Практическая ценность диссертационной работы связана с ее прикладной ориентацией. Созданные программные комплексы могут быть применены для моделирования течений газа в случае одной и двух пространственных переменных. Вычислительные эксперименты по исследованию условий возникновения и развитии Т-слоя являются продолжением проведенных ранее исследований и служат средством обнаружения новых свойств данного явления.

Апробация результатов работы. Результаты работы докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, а также на следующих конференциях и семинарах:

1. Международной конференции „Современные проблемы вычислительной математики и математической физики“, секция „Математическое моделирование“ (г. Москва, 2009 г.);

2. Тихоновских чтениях в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, секция вычислительной математики и кибернетики (г. Москва, 2009 г.);

3. Международной молодежной конференции-школе „Современные проблемы прикладной математике и информатике“ (г. Дубна, 2012 г.);

4. Ломоносовских чтениях в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, секция вычислительной математики и кибернетики (г. Москва, 2013 г.);

5. Одиннадцатом международном семинаре „Mathematical Models & Modeling in Laser-Plasma Processes & Advanced Science Technologies“ (г. Будва, Черногория, 2013 г.).

Личный вклад соискателя. Все исследования и результаты, изложенные в диссертационной работе, проведены и получены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Публикации. Положения диссертации отражены в 11 печатных работах: 6 статьях [1-6] (5 из которых опубликованы в изданиях, включенных в Перечень ведущих научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертации, рекомендованных ВАК РФ [1-5]), 5 тезисах докладов [7-11].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 116 страницах, содержит 29 иллюстраций и одну таблицу. Библиография включает 93 наименования.

Содержание работы

Во **введении** приведен обзор литературы по теме исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту. В обзоре литературы представлены основные методы решения уравнения переноса и уравнений газовой динамики, а также приведен обзор работ по исследованию задачи о Т-слое в различных постановках.

Первая глава посвящена построению и исследованию сплайн-схемы для линейного и квазилинейного уравнения переноса. Для линейного уравнения переноса поставлена задача Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0,\\ f(x,0)=f_0(x),\quad a=const>0.\end{gathered}\tag{1}$$

Решение построено численно на равномерной сетке $\omega =$

$\{(x_k, t_j),\ k = 1, \ldots, N,\ j = 0, \ldots, T\}$ с шагами h и τ.

Построение схемы проведено интегро-интерполяционным методом. В результате интегрирования уравнения переноса по пространственно-временно ячейке $[x_{k-1/2}, x_{k+1/2}] \times [t_j, t_{j+1}]$ имеем интегральное тождество:

$$h(f_k^{j+1} - f_k^j) + WI_{k+\frac{1}{2},j} - WI_{k-\frac{1}{2},j} = 0, \tag{2}$$

где

$$f_k^j = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f(x, t_j)dx,\ WI_{k+\frac{1}{2},j} = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} af(x_{k+\frac{1}{2}}, t)dt. \tag{3}$$

Соотношение (2) описывает семейство разностных схем. Задача поиска численного решения тем самым сведена к аппроксимации интегральных потоков WI. Геометрический смысл интегрального потока $WI_{k+1/2,j}$ - площадь криволинейной трапеции с основанием $[x_{k+1/2} - a\tau, x_{k+1/2}]$.

Для вычисления интегральных потоков WI проинтерполируем сеточную функцию $y_k^j = y^j(x_k)$ на текущем временном слое, получив функцию непрерывного аргумента $\tilde{y}^j(x)$. Для интерполяции воспользуемся простейшими линейными сплайнами, которые на каждом отрезке $[x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]$ в момент времени t_j имеют вид:

$$\begin{gathered}\tilde{y}^j(x) = y_k^j + D_k^j(x - x_k),\\ D_k = \frac{|y_{\bar{x}}|y_x + |y_x|y_{\bar{x}}}{|y_x| + |y_{\bar{x}}|}.\end{gathered} \tag{4}$$

Такой выбор наклона сплайн-реконструкции обеспечивает монотонность разностной схемы, а также второй порядок аппроксимации на участках монотонности решения. В окрестностях экстремума решения порядок аппроксимации снижается до первого.

После подстановки соотношений (4) и вычисления соответствующих площадей трапеций получена разностная сплайн-схема для решения линейного уравнения переноса:

$$y_k^{j+1} = y_k^j - \gamma(y_k^j - y_{k-1}^j) - h\frac{\gamma}{2}(1-\gamma)(D_k^j - D_{k-1}^j),\ \gamma = \frac{a\tau}{h}. \tag{5}$$

Проведенные численные расчеты подтвердили монотонность построенной схемы, а также полученный теоретически порядок аппроксимации. Дополнительная серия расчетов проведена для выявления зависимости качества получаемого решения от числа Куранта.

Следующий подраздел первой главы посвящен численному решению задачи Коши для квазилинейного уравнения переноса:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ f(x,0) = f_0(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Построение схемы в этом случае выполнено аналогично (1): интегро-интерполяционным методом получено семейство разностных схем. Выбор способа вычисления интегрального потока определяет конкретную схемы. Разница состоит лишь в том, что интегральный поток имеет иную геометрическую интерпретацию (рис. 1). Это обусловлено непостоянной скоростью движения профиля (скорость совпадает с решением уравнения (6)).

Слайн-схема для решения квазилинейного уравнения переноса (в том числе со знакопеременными начальными данными) имеет вид:

$$f_k^{j+1} = f_k^j - \frac{\overleftarrow{WI}_k^j + \overrightarrow{WI}_k^j - \overleftarrow{WI}_{k+1}^j - \overrightarrow{WI}_{k-1}^j}{h},$$

$$\overleftarrow{WI}_k^j = \begin{cases} -\dfrac{\left(yL_k^j\right)^2\tau}{2(1+D_k^j\tau)},\ yL_k^j < 0, \\ 0, \quad yL_k^j \geq 0, \end{cases} \quad \overrightarrow{WI}_k^j = \begin{cases} -\dfrac{\left(yR_k^j\right)^2\tau}{2(1+D_k^j\tau)},\ yR_k^j \geq 0, \\ 0, \quad yR_k^j < 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$yL_k^j = \tilde{y}^j(x_{k-\frac{1}{2}}) = y_k^j - \frac{hD_k^j}{2},\ yR_k^j = \tilde{y}^j(x_{k+\frac{1}{2}}) = y_k^j + \frac{hD_k^j}{2}.$$

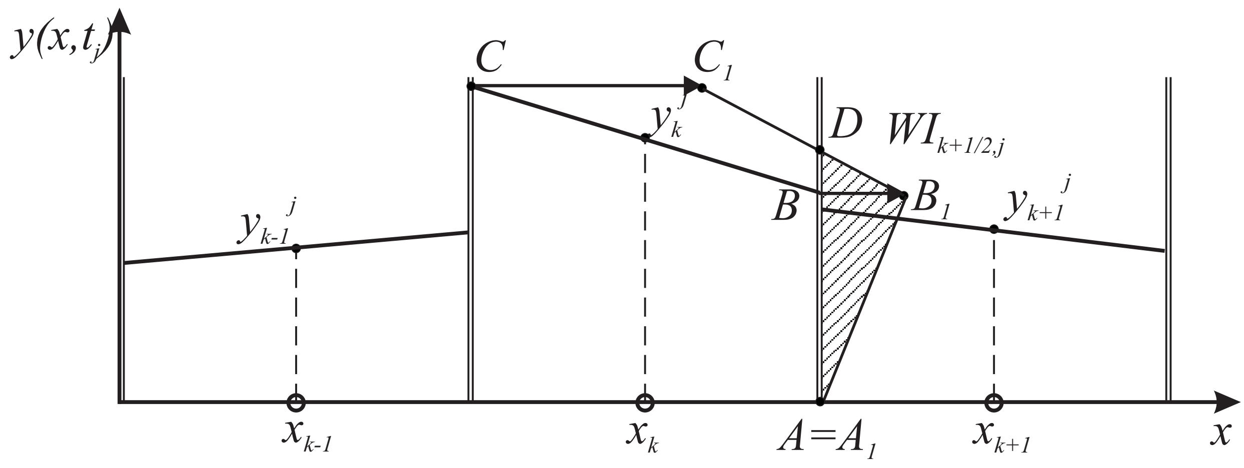

Рис. 1. Геометрическая интерпретация интегрального потока для квазилинейного уравнения переноса.

В работе приведены результаты тестовых расчетов и проведено сравнение решений, полученных с помощью сплайн-схемы и с помощью монотонизированной схемы К.И. Бабенко („квадрат“). Показано, что обе схемы дают практически неотличимые результаты при значительных различиях в сложности алгоритма.

Во **второй главе** разработана квазиакустическая схема для решения уравнений газовой динамики. Построение начато с решения одномерной системы в переменных Лагранжа. В качестве лагранжевой координаты использована координата ξ положения лагранжевой частицы в начальный момент времени $t = 0$, т.е. $x(0) = \xi$. Система уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа для одномерного плоского течения в дивергентной форме имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho^0(\xi)}{\rho}\right) = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial(\rho^0(\xi)u)}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho^0(\xi)\left(\epsilon + \dfrac{u^2}{2}\right)\right) + \dfrac{\partial(pu)}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = u. \end{cases} \tag{8}$$

здесь $\rho_0(\xi)$ – значение плотности в начальный момент времени. Численное решение задачи строится на равномерной сетке с узлами (ξ_k, t_j), где $\xi_k = \zeta_1 + kh,\ k = 0, 1, \ldots, N,\ t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, J,\ N$ - фиксированное число ячеек пространственной сетки с шагом $h = (\zeta_2 - \zeta_1)/N$, τ - постоянный шаг по времени.

Построение разностной схемы проведено интегро-интерполяционным методом. После интегрирования каждого из уравнений системы по пространственно-временной ячейке получены балансные соотношения

$$\begin{cases} \Delta x_k^{j+1} - \Delta x_k^j = WUI_{k+\frac{1}{2}}^j - WUI_{k-\frac{1}{2}}^j, \\ h(q_k^{j+1} - q_k^j) + WQI_{k+\frac{1}{2}}^j - WQI_{k-\frac{1}{2}}^j = 0, \\ h(e_k^{j+1} - e_k^j) + WEI_{k+\frac{1}{2}}^j - WEI_{k-\frac{1}{2}}^j = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где Δx_k^j - объём одномерной частицы, q_k^j - объёмный импульс, а e_k^j - средняя по объёму величина количества энергии в ячейке разностной сетки. Слагаемые $WUI_{k+1/2}^j$, $WQI_{k+1/2}^j$ и $WEI_{k+1/2}^j$ представляют собой интегральные потоки соответствующих величин через границы ячейки расчётной сетки за время τ. Задача построения разностной схемы тем самым состоит в аппроксимации потоков.

Представим функции давления, плотности и скорости в виде суммы постоянного фонового значения и малых возмущений вида

$$p(\xi, t) = \bar{p} + \delta p(\xi, t), \quad u(\xi, t) = \bar{u} + \delta u(\xi, t), \quad \rho(\xi, t) = \bar{\rho} + \delta\rho(\xi, t), \tag{10}$$

то потоки в соответствии с решением линеаризованной системы уравнений газовой динамики распадались бы на сумму трёх слагаемых, первое из которых обусловлено постоянным фоновым значением, а два других – движением малых возмущений вдоль своих характеристик со своими характеристическими скоростями:

$$
\begin{cases}
WUI^j_{k+1/2} = \bar{u}\tau + \overrightarrow{WUI}^j_{k+1/2} + \overleftarrow{WUI}^j_{k+1/2}, \\
WQI^j_{k+1/2} = \bar{p}\tau + \overrightarrow{WQI}^j_{k+1/2} + \overleftarrow{WQI}^j_{k+1/2}, \\
WEI^j_{k+1/2} = \bar{u}\bar{p}\tau + \left(\bar{p}\overrightarrow{WUI}^j_{k+1/2} + \bar{u}\overrightarrow{WQI}^j_{k+1/2}\right) + \\
\qquad\qquad + \left(\bar{p}\overleftarrow{WUI}^j_{k+1/2} + \bar{u}\overleftarrow{WQI}^j_{k+1/2}\right).
\end{cases}
\tag{11}
$$

Для разложения функций на суммы вида (11) предложен следующий алгоритм. В каждой ячейке $[\xi_{k-1/2}, \xi_{k+1/2}]$ используем локальную сплайн-реконструкцию опорных функций ρ, u и p в виде (4). На отрезке $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ проводим расслоение (разбиение) линейных сплайн-функций $f^j_k(\xi, t_j)$ (под f понимается одна из функции ρ, u или p) и $f^j_{k+1}(\xi, t_j)$ на совокупность горизонтальных слоёв (с номерами $m = 1, \ldots, M$), параллельных оси абсцисс (рис. 2 (а)). Количество слоёв M выбираем таким образом, чтобы слои были достаточно тонкими и их можно было считать малыми возмущениями. Горизонтальное сечение, ближайшее к среднему между значениями сплайн-функций $f^j_k(\xi_{k+1/2}, t_j)$ и $f^j_{k+1}(\xi_{k+1/2}, t_j)$ на границе раздела $\xi = \xi_{k+1/2}$ двух соседних ячеек (рис. 2 (а)), принимаем общим постоянным фоном для функции f между этими ячейками.

Каждую из сплайн-функций $f^j_k(\xi, t_j)$ и $f^j_{k+1}(\xi, t_j)$ на полуячейках $[\xi_k, \xi_{k+1/2}]$, $[\xi_{k+1/2}, \xi_{k+1}]$ заменяем изображённой на рис. 2 (а) конструкцией, состоящей из общего постоянного фона $f_{F,k+1/2}$, на котором последовательно располагаются „кирпичи“ малых ступенчатых возмущений (с учётом знака). Существенно при этом, что каждый „кирпич“ имеет своим индивидуальным постоянным фоном либо общий постоянный фон $f_{F,k+1/2}$, либо другой „кирпич“, примыкающий к нему со стороны общего постоянного фона.

Таким образом, в соответствии с геометрической интерпретацией интегральных потоков их вычисление сводится к суммированию площадей тех частей „кирпичей“, которые при движении в сторону границы $\xi = \xi_{k+1/2}$ со своей скоростью звука пересекли её за время τ (рис. 2 (б)).

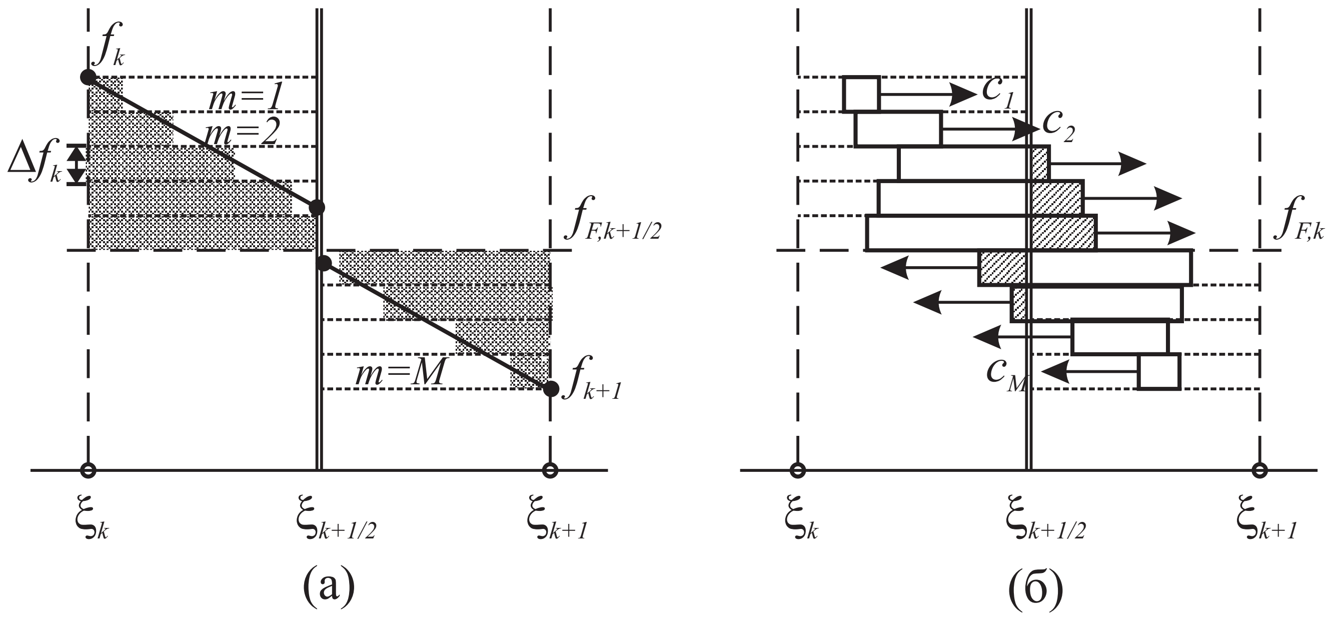

Рис. 2. (а) Расслоение сплайн-функции на „кирпичи" малых возмущений, определение фонового значения; (б) движение „кирпичей" и вычисление интегральных потоков.

Из описанного алгоритма непосредственно вытекает условие устойчивости данного метода: величина шага по времени τ должна быть такой, чтобы ни один „кирпич" не вышел за пределы рассматриваемого отрезка:

$$\frac{\tilde{c\rho}\tau}{\rho^0(\xi)} \leq \frac{h}{2}, \;\; \tilde{c\rho} = \max_{k,j} c_k^j \rho_k^j. \tag{12}$$

Тестовая задача с гладким решением позволила исследовать свойства квазиакустической схемы. На рис. 3 представлены результаты расчёта, включая точное решение (а), а также график зависимости погрешности решения от шагов сетки (б). На рис. 3 (б) видно, что погрешность решения зависит от шагов сетки нелинейно (график погрешности аппроксимируется параболой), что подтверждает априорную оценку, согласно которой схема имеет порядок аппроксимации на гладких решениях выше первого.

Предложенный алгоритм может быть использован как первый этап при решении уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. В этом случае сначала решается система уравнений в переменных Лагранжа без уравнения неразрывности с помощью квазиакустической схемы, а затем производится пересчёт

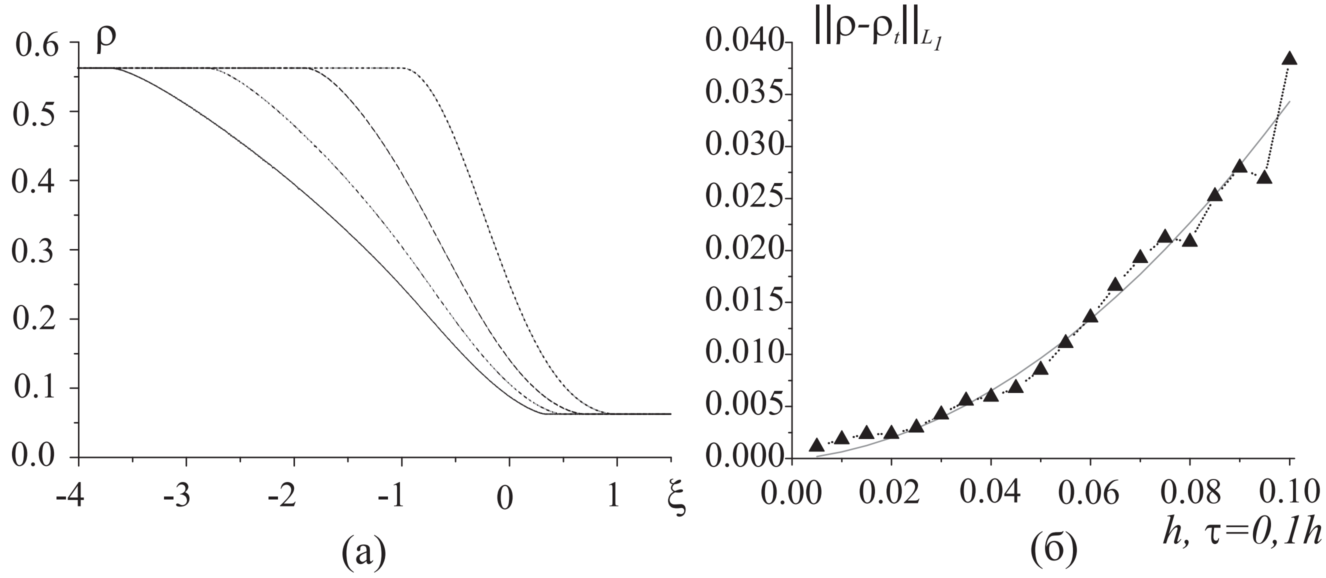

Рис. 3. Решение задачи с гладким начальным профилем. График функции плотности на последовательные моменты времени (а) и график зависимости погрешности решения от шагов сетки при постоянном числе Кураната (б).

полученного решения с учётом конвективных потоков. Алгоритм второго этапа основан на методе крупных частиц О.М. Белоцерковского. Основной величиной, используемой на этом этапе, является поток массы через границу ячейки, то есть $WUI^{j}_{k_1/2}$, вычисленный на первом этапе. Такая модификация оригинального алгоритма позволяет снизить количество операций без потери точности.

Проведен ряд тестов для исследования построенного алгоритма. На рис. 4 приведены результаты решения задачи о распаде произвольного разрыва, полученные с помощью предложенного алгоритма (а) и по схеме Роу – Эйнфельдта – Ошера (схема повышенного порядка аппроксимации) (б).

Полученное с помощью квазиакустической схемы решение монотонно. Контактный разрыв передаётся хуже, чем по схеме Роу – Эйнфельдта – Ошера, что связано с дополнительной диссипацией, возникающей при пересчёте решения на эйлерову сетку. Ударная волна воспроизведена не хуже, чем в схеме повышенного порядка аппроксимации, количество интервалов на фронте разрыва равно 3. При этом схема Роу – Эйнфельдта – Ошера имеет больший шаблон, существенно сложнее в реализации и накладывает существенно более жесткие

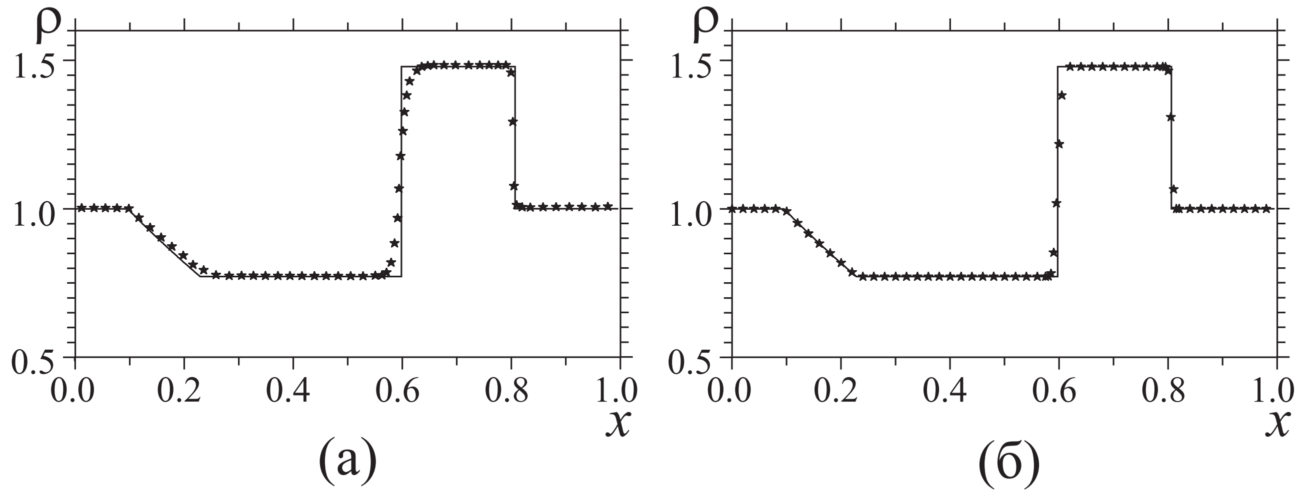

Рис. 4. Решение задачи о распаде произвольного разрыва. Графики плотности для точного (сплошная линия) и приближённого решения (звездочки), полученные с помощью квазиакустической схемы (а) и по схеме Роу – Эйнфельдта – Ошера (б).

ограничения на шаги сетки.

Основное отличие двумерной задачи состоит в том, что вместо нахождения решения двумерной линеаризованной системы и вычисления двойного интеграла использован метод переменных направлений. Этим способом задача сведена к одномерному случаю для каждой из двух пространственных переменных. Интерполяция сеточной функции проведена с помощью аналогичных двумерных локально-линейных сплайн-плоскостей, а для вычисления интегральных потоков также применено разбиение полученных сплайн-функций на трёхмерные „кирпичи“.

Третья глава посвящена исследованию методом вычислительного эксперимента прикладной задачи о возникновении и устойчивости Т-слоя в двумерном случае. Т-слой представляет собой высокотемпературное самоподдерживающееся образование в плазме в присутствии магнитного поля. Появление Т-слоя обусловлено нелинейными связями между электромагнитными и газодинамическими параметрами среды. Условия возникновения, развития и устойчивости явления в случае одномерной задачи достаточно полно изучены.

Рассмотрен двумерный плоский канал постоянной ширины D, заполненный однородным сжимаемым газом, движущимся вдоль оси канала (ось x).

Электропроводность газа, зависящая от его температуры, недостаточна для обеспечения взаимодействия газа с магнитным полем. В начальный момент времени магнитное поле однородно и имеет только одну отличную от нуля компоненту, направленную вдоль оси z. Невозмущённая начальная температура равна T_0. В начальный момент времени $t = 0$ в поток газа вносится локальное возмущение температуры до величины $T_B > T_0$. При этом электропроводность в возмущённой зоне возрастает и становится достаточной для взаимодействия газа с магнитным полем.

Для поставленной задачи использован метод расщепления по физическим процессам, в результате чего численное решение системы распадается на три этапа:

1. вычисление газодинамических параметров системы в новый момент времени без учёта магнитного поля с помощью квазиакустической схемы;

2. вычисление электромагнитных параметров среды – решение уравнения диффузии магнитного поля (схема „по потоку и по ветру“, решение сеточных уравнений находится с помощью метода переменных направлений с использованием потоковой прогонки);

3. пересчет газодинамических параметров с учетом электромагнитного взаимодействия.

Результаты проведенных расчетов показали, что при превышении пороговых значений начальных параметров в газе устойчиво наблюдается образование и развитие Т-слоя. При этом по мере движения изначально двумерного возмущения вдоль канала имеет место постепенный переход к одномерной структуре течения. Перестройка происходит за время перемещения начального возмущения на несколько своих длин вдоль канала (рис. 5).

На рис. 5 (а) представлены результаты численного решения поставленной задачи. После небольшого падения температуры в первые моменты времени

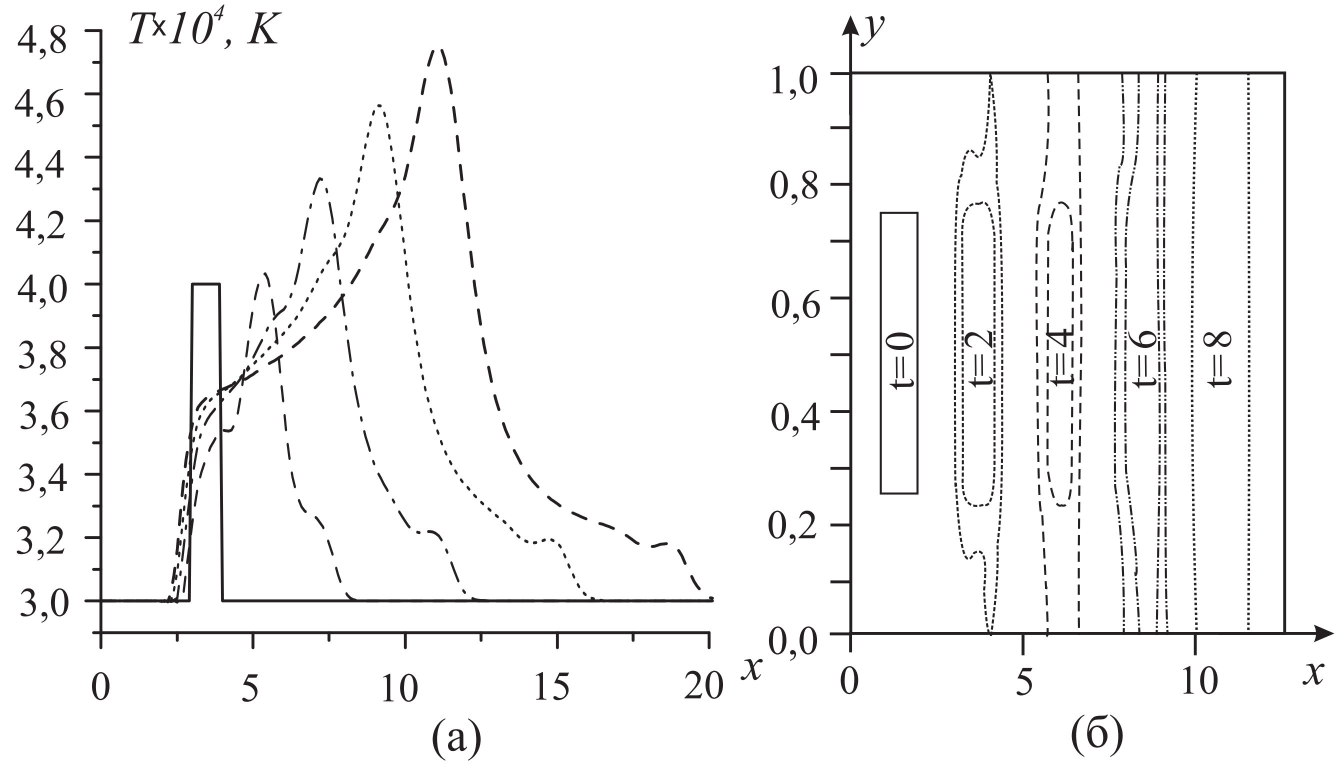

Рис. 5. (а) Профиль температуры вдоль оси канала в различные моменты времени ($t_0 = 0$, $t_1 = 2$ мсек, $t_2 = 4$ мсек, $t_3 = 6$ мсек, $t_4 = 8$ мсек); (б) линии уровня температуры для возмущения на различные моменты времени.

начинается ее интенсивный рост, и вскоре максимальное значение превышает начальную температуру возмущения. На рис. 5 (б) представлены линии уровня температуры. Первоначально двумерный профиль с течением времени эволюционирует в одномерную структуру.

Скорость роста температуры зависит от таких параметров, как начальная температура возмущения, величина магнитного поля, а также скорость потока. Влияет на развитие возмущения и его продольный размер. Расчеты показали, что при уменьшении ширины возмущения d рост температуры сохраняется, но при этом увеличиваются время установления одномерной структуры и время, необходимое возмущению для того, чтобы превысить значение температуры начального возмущения. Если ширина возмущения составляет менее 10% ширины канала, развитие Т-слоя не происходит.

В ходе вычислительных экспериментов установлено, что Т-слой возникает при превышении параметром магнитогидродинамического взаимодействия R_M

некоторого критического значения, которое зависит от геометрических параметров задачи – начальных размеров возмущения. Время образования Т-слоя зависит от этих же параметров.

Основные результаты диссертационной работы

1. Разработан численный метод решения уравнения переноса в одномерной постановке на регулярной равномерной сетке;

2. метод обобщен для решения уравнений газовой динамики и уравнений магнитной гидродинамики в двумерной постановке на регулярной равномерной прямоугольной сетке;

3. численные методы реализованы в виде программного комплекса;

4. построенные алгоритмы использованы для решения МГД математической модели образования и развития Т-слоя в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля; в вычислительных экспериментах исследованы условия образования и развития Т-слоя в зависимости от начальных параметров магнитного поля, скорости течения и геометрических характеристик возмущения.

Основные результаты диссертации изложены в работах

1. ***Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А.*** **Численное моделирование распространения гемодинамических импульсов // Мат. моделирование. 2009. Т. 21, № 12. С. 21-34.**

2. ***Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А.*** **Численное моделирование распространения акусти-**

ческих импульсов в гемодинамике // Дифф.уравнения. 2009. Т. 45, №8. С. 1179-1187.

3. ***Абакумов М.В., Галанина А.М., Исаков В.А., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П., Хруленко А.Б.*** **Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47, №8. С. 1092-1098.**

4. ***Галанина А.М., Фаворский А.П.*** **Численное решение уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных // Матем. моделирование. 2012. Т. 24, №12. С. 119–123.**

5. ***Фаворский А.П., Галанина А.М., Исаков В.А.*** **Конструктивный подход к численному решению квазилинейных уравнений переноса // Мат. моделирование. 2013. Т. 25, №8. С. 80–88.**

6. *Galanina A., Favorskiy A.* Local two-dimensional perturbations evolution in small-conductivity gas flow in magnetic field // Mathematica Montisnigri. 2013. V. XXVII. P. 53-64.

7. *Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А.* Численное моделирование распространения гемодинамических импульсов // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: тез. докл. международной конференции памяти академика А.А. Самарского. М.:, 2009. С. 376.

8. *Галанина А.М.* Численное решение уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2010 года. МГУ им. М.В. Ломоносова. Ф-т ВМК, 2010. С. 32–34.

9. *Фаворский А.П., Галанина А.М., Исаков В.А.* Конструктивный подход к численному решению квазилинейных уравнений переноса //

Современные проблемы прикладной математики и информатики: тез. докл.международной молодежной конф.-школы, 2012. С. 34.

10. *Фаворский А.П., Галанина А.М.* Развитие двумерных локальных возмущений в потоке слабопроводящего газа в магнитном поле // Ломоносовские чтения 2013: тез. докл. конференции, 2013. С. 88–90.

11. *Galanina A., Favorskiy A.* Local two-dimensional perturbations evolution in small-conductivity gas flow in magnetic field // Mathematical models modeling in laser-plasma processes advanced science technologies: abstract. Eleventh international seminar. Budva, 2013. P. 43.