

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Исаков Виктор Александрович

**Квазиакустическая схема для уравнений
Эйлера газовой динамики**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель:

Фаворский Антон Павлович,

доктор физико-математических наук, профессор

Головизнин Василий Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов, федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Жуков Виктор Тимофеевич,

доктор физико-математических наук, заведующий отделом, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Котеров Владимир Николаевич,

кандидат физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук»

Ведущая организация:

федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт автоматизации проектирования Российской академии наук»

Защита состоится «4» декабря 2013 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан « » 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.43 доктор физико - математических наук, профессор

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Уравнения газовой динамики составляют основу многих математических моделей, применяемых для решения задач в таких областях науки и техники, как аэродинамика летательных аппаратов, астрофизика, прогноз погоды, проектирование магнитогидродинамических генераторов электрической энергии, теория реактивных двигателей, управляемый термоядерный синтез и многие другие. Одним из важных вопросов здесь является разработка эффективных методов решения этих уравнений. В силу нелинейного характера уравнений газовой динамики фактически единственным универсальным и эффективным способом их решения являются численные методы, основанные на использовании быстродействующих ЭВМ.

На сегодняшний день существует большое количество численных методов решения уравнений газовой динамики. Их число продолжает расти, пополняясь всё новыми разработками. С одной стороны, это свидетельствует о важности численного решения уравнений газовой динамики в различных приложениях, а с другой, такое обилие методов численного решения говорит о том, что пока не существует универсального метода, удовлетворяющего всем предъявляемым к нему требованиям.

В работах [1, 2] описывается предложенный А.П. Фаворским новый алгоритм решения линейного и простейшего квазилинейного уравнения переноса. В основе алгоритма лежит кусочно-линейная реконструкция численного решения, опирающаяся на характеристические свойства уравнений переноса. Для случая линейного уравнения переноса проведено достаточно подробное исследование предлагаемой методики. Показано, что построенная на основе данной методики явная, консервативная, однородная разностная схема обладает вторым порядком аппроксимации в областях гладкости решения и позволяет обеспечить монотонность решения без использования искусственных регуляризаторов.

Обобщению предлагаемой методики для решения квазилинейных уравнений Эйлера газовой динамики в одномерном, двумерном и трёхмерном случаях посвящена диссертационная работа.

Целью диссертационной работы является

1. разработка нового алгоритма, являющегося развитием методики [1, 2], для решения уравнений газовой динамики в случае одного, двух и трёх пространственных измерений.
2. применение разработанной квазиакустической схемы к решению прикладной задачи о взаимодействии газовых струй, истекающих из двигателей самолёта, с отражающим экраном-отбойником.

Для достижение поставленной цели решены следующие **задачи**:

1. разработан алгоритм решения уравнений газовой динамики в одномерном случае;
2. проведено обобщение алгоритма на случай двух и трёх пространственных измерений;
3. проведена верификация разработанной квазиакустической схемы на одномерных, двумерных и трёхмерных модельных задачах;
4. проведено сравнение численного решения, полученного с помощью квазиакустической схемы, с решениями, полученными по известным схемам второго порядка точности;
5. разработан параллельный алгоритм, с использованием которого проведено математическое моделирование прикладной задачи о взаимодействии газовых струй, истекающих из двигателей самолёта с отражающим экраном-отбойником на суперкомпьютере IBM eServer pSeries 690 (Regatta).

Научная новизна и практическая ценность работы заключаются в следующем:

1. разработанная квазиакустическая схема на гладких участках решения соответствует по качеству схемам второго порядка точности, позволяет обеспечить монотонность решения без использования искусственных регуляризаторов, физически корректно передаёт профили разрывов, правильно воспроизводит звуковую точку и поведение решения в её окрестности;

2. результаты численного моделирования прикладной задачи, проведённые с помощью разработанной квазиакустической схемы, близки к результатам, полученным с помощью натуральных экспериментов.

Достоверность и обоснованность полученных результатов математического моделирования гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов численного моделирования с данными, полученными в ходе модельных и натуральных экспериментов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. алгоритм для решения уравнений газовой динамики в одномерном случае;
2. обобщение предлагаемого алгоритма на случай двух и трёх пространственных измерений;
3. результаты численного моделирования задачи о взаимодействии газовых струй, истекающих из двигателей самолёта, с отражающим экраном - отбойником.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. научной конференции „Тихоновские чтения“ (г. Москва, 2009);
2. международной молодёжной конференции-школе „Современные проблемы прикладной математики и информатики“ (MPAMCS' 2012)(г. Дубна, 22 – 27 августа 2012);
3. XX-ой международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных „Ломоносов – 2013“ , секция „Вычислительная математика и информатика“ (г. Москва, 9 – 12 апреля 2013);
4. научной конференции „Ломоносовские чтения“ (г. Москва, 24 апреля 2013);
5. научно-исследовательском семинаре в Институте прикладной математике им. М.В. Келдыша РАН под руководством В.Т. Жукова (г. Москва, февраль 2013).

Личный вклад. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Весь заимствованный материал обозначен в работе соответствующими ссылками.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 9 печатных работах: 5 статей [1–5] в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, 4 тезиса докладов [6–9].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 127 страницах текста, содержит 80 иллюстраций и 5 таблиц. Список литературы включает 97 наименований.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009-2013 годы.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В первой главе описывается алгоритм численного решения уравнений газовой динамики в одномерном случае, в основе которого лежит линейная реконструкция и квазиакустическое представление решения в пределах ячейки расчётной сетки.

В первом разделе приведена общая постановка задачи. Рассматривается система одномерных уравнений идеальной газовой динамики в дивергентной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F(f)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

где $f = \{\rho, q = \rho u, e = \rho(\varepsilon + u^2/2)\}^T$ – вектор-столбец консервативных переменных системы, $F(f) = \{u\rho, uq + p, u(e + p)\}^T$ – вектор-столбец потоков, ρ – плотность газа, $q = \rho u$ – объёмная плотность импульса газа, p – давление

газа, $e = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$ – полная энергия газа единицы объёма (использовано уравнение состояния идеального газа в форме $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где ε – удельная внутренняя энергия газа), u – скорость газа, $\gamma > 1$ – показатель адиабаты. Все газодинамические функции системы зависят от времени t и декартовой координаты x .

Во втором разделе проведена линеаризация уравнений системы (1) на однородных течениях. Решение линеаризованной системы уравнений представляет собой суперпозицию бегущих волн малых возмущений и используется для вычисления интегральных потоков.

В третьем разделе описан процесс построения квазиакустической схемы. Построение схемы проведено на прямоугольной равномерной сетке, состоящей из пространственно-временных ячеек $\Omega_k^n = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}] \times [t_n, t_n + \Delta t]$, с помощью интегро-интерполяционного метода. Значения газодинамических функций системы определены в центре ячейки $\Omega_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]$ и представляют собой средние интегральные значения непрерывно распределённых величин по данной ячейке на момент времени $t = t_n$. Получены основные балансные соотношения, которые выражают законы сохранения массы, импульса и полной энергии

$$(f_k^{n+1} - f_k^n) \Delta x + [IF_{k+1/2}^n - IF_{k-1/2}^n] = 0,$$

где f_k^n, f_k^{n+1} – средние интегральные значения функции f по ячейке Ω_k на моменты времени $t = t_n$ и $t = t_n + \Delta t$, а величины $IF_{k\pm 1/2}^n$ – интегральные потоки функции F через границы $x = x_{k\pm 1/2}$ ячейки Ω_k .

Построение схемы сводится к аппроксимации потоков $IF_{k\pm 1/2}^n$, состоящей из следующих этапов.

На первом шаге в пределах каждой ячейки Ω_k расчётной сетки каждая из опорных функций системы $f = \{\rho, u, p\}^T$ на момент времени $t = t_n$ приближается линейной функцией

$$f(x; x_k, t_n) \simeq f_k^n + (x - x_k) D_k^n, x \in \Omega_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]$$

Величина D_k^n задаёт угол наклона линейной функции $f(x; x_k, t_n)$ и определяется по формуле

$$D_k^n = \frac{|f_{\bar{x},k}^n|}{|f_{\bar{x},k}^n| + |f_{x,k}^n|} \cdot f_{x,k}^n + \frac{|f_{x,k}^n|}{|f_{\bar{x},k}^n| + |f_{x,k}^n|} \cdot f_{\bar{x},k}^n,$$

где $f_{\bar{x},k}^n = (f_k^n - f_{k-1}^n) / \Delta t$, $f_{x,k}^n = (f_{k+1}^n - f_k^n) / \Delta t$. Такой способ определения величины D_k^n позволяет обеспечить монотонность решения на соответствующих участках монотонности сеточной функции $\{f_k^n\}$.

Далее на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается горизонтальное сечение, которое назовём общим постоянным фоном функции f между ячейками Ω_k и Ω_{k+1} . Значение опорной функции на фоне определяется как среднее арифметическое значений линейных функций $f(x; x_k, t_n)$ и $f(x; x_{k+1}, t_n)$ на общей границе $x = x_{k+1/2}$ и обозначается $\bar{f}_{k+1/2}$. На общем постоянном фоне определены значения трёх опорных функций системы: $\bar{\rho}_{k+1/2}$, $\bar{u}_{k+1/2}$, $\bar{p}_{k+1/2}$.

На следующем шаге на полуотрезках $[x_k, x_{k+1/2}]$ и $[x_{k+1/2}, x_{k+1}]$ заменяем линейные функции конструкцией, состоящей из общего постоянного фона и расположенных на нём M горизонтальных слоёв разбиения, параллельных координатному направлению x . Построенные горизонтальные слои разбиения отождествляются с малыми возмущениями опорных функций системы. Фоном для распространения каждого такого горизонтального слоя является либо общий постоянный фон, либо поверхность другого горизонтального слоя, примыкающего со стороны общего постоянного фона.

Такой способ приближения функций $f(x; x_k, t_n)$ и $f(x; x_{k+1}, t_n)$ приводит к тому, что интегральный поток через границу ячейки Ω_k складывается из потока, обусловленного фоновыми значениями опорных функций системы, и трёх интегральных компонент потока, соответствующих характеристическим скоростям u , $u + c$ и $u - c$, с которыми по соответствующим характеристикам распространяются бегущие волны малых возмущений. Бегущие волны представляют собой решение линеаризованных уравнений газовой динамики.

Значение компоненты потока определяется как сумма площадей тех частей горизонтальных слоёв разбиения опорных функций системы, распо-

ложенных на полуотрезках $[x_k, x_{k+1/2}]$ и $[x_{k+1/2}, x_{k+1}]$, которые за время Δt , двигаясь каждый со своей скоростью по своему фону, пересекли границу ячейки Ω_k .

В четвёртом разделе представлены результаты численных расчётов ряда тестовых задач одномерной газовой динамики. Проведено сравнение численного решения, полученного с помощью квазиакустической схемы, с решением, полученным по схеме Годунова первого порядка точности, схемам годуновского типа второго порядка точности: MUSCL-Хансока схеме и WAF схеме (см. рис. 2), а также схеме Роу-Ошера с модификацией Эйфельдта второго порядка точности (см. рис. 1).

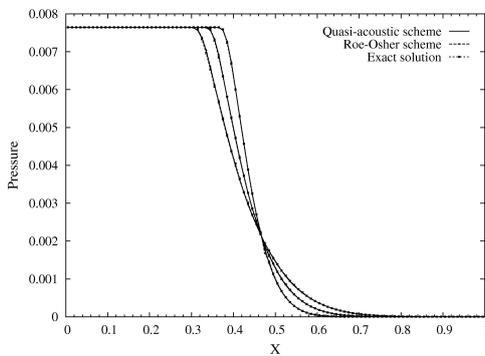


Рис. 1: Расчёт задачи с гладким начальным профилем скорости.

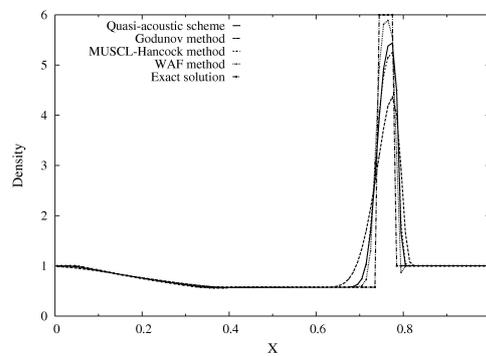


Рис. 2: Расчёт задачи о распаде разрыва с сильным перепадом давления (с 1000 до 0.01).

Разработанная квазиакустическая схема обладает следующими свойствами:

- схема является явной, консервативной, однородной;
- на гладких участках решения соответствует по качеству схемам второго порядка точности;
- физически корректно передаёт разрывные решения;
- правильно воспроизводит звуковую точку и поведение решения в её окрестности;
- позволяет обеспечить монотонность решения без использования искусственных регуляризаторов.

Во второй главе производится обобщение предлагаемого алгоритма на случай двух пространственных измерений.

В первом разделе приведена общая постановка задачи. Рассматривается система уравнений идеальной газовой динамики (уравнений Эйлера) в случае двух пространственных измерений, представленных в дивергентной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F(f)}{\partial x} + \frac{\partial G(f)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

где $f = \{\rho, q^{(1)} = \rho u, q^{(2)} = \rho v, e = \rho(\varepsilon + (u^2 + v^2)/2)\}^T$ – вектор-столбец консервативных переменных системы, $F(f) = \{\rho u, uq^{(1)} + p, uq^{(2)}, u(e + p)\}^T$, $G(f) = \{\rho v, vq^{(1)}, vq^{(2)} + p, v(e + p)\}^T$ – вектор-столбцы потоков.

Во втором разделе проведена процедура линеаризации системы уравнений (2). Решение линеаризованной системы уравнений получено с помощью метода расщепления по координатным направлениям линеаризованных уравнений газовой динамики и используется для вычисления интегральных потоков.

В третьем разделе описан процесс построения квазиакустической схемы в случае двух пространственных измерений.

Численное решение системы уравнений (2) строится на равномерной сетке, состоящей из пространственно-временных ячеек $\Omega_{ij}^n = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [t_n, t_n + \Delta t]$, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Значения газодинамических функций системы определены в центре ячейки $\Omega_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ и представляют собой средние интегральные значения функций по данной ячейке на момент времени $t = t_n$.

Построение схемы осуществляется интегро-интерполяционным методом. Полученные балансные соотношения выражают законы сохранения массы, импульса и полной энергии

$$(f_{ij}^{n+1} - f_{ij}^n) \Delta x \Delta y + [IF_{i+1/2}^n - IF_{i-1/2}^n] + [IG_{j+1/2}^n - IG_{j-1/2}^n] = 0,$$

где f_{ij}^n, f_{ij}^{n+1} – средние интегральные значения функции f по ячейке Ω_{ij} на моменты времени $t = t_n$ и $t = t_n + \Delta t$, величины $IF_{i\pm 1/2}^n, IG_{j\pm 1/2}^n$ представляют

собой интегральные потоки F и G через соответствующие границы ячейки Ω_{ij} .

Процесс аппроксимации интегральных потоков состоит из следующих этапов.

На первом этапе в пределах каждой ячейки Ω_{ij} расчётной сетки каждая из опорных функций системы $f = \{\rho, u, v, p\}^T$ на момент времени $t = t_n$ приближается линейной плоскостью, проходящей через значение опорной функции в центре ячейки f_{ij}^n . Уравнение плоскости имеет вид

$$f(x, y; x_i, y_j, t_n) \simeq f_{ij}^n + (x - x_i) D_{ij,x}^n + (y - y_j) D_{ij,y}^n,$$

Величины $D_{ij,x}^n$ и $D_{ij,y}^n$ задают вектор нормали к линейной плоскости и определяются по формуле

$$D_{ij,\xi}^n = \frac{|f_{\bar{\xi},ij}^n|}{|f_{\bar{\xi},ij}^n| + |f_{\xi,ij}^n|} f_{\xi,ij}^n + \frac{|f_{\xi,ij}^n|}{|f_{\bar{\xi},ij}^n| + |f_{\xi,ij}^n|} f_{\bar{\xi},ij}^n$$

где $\xi = \{x, y\}^T$, $f_{\bar{\xi},ij}^n, f_{\xi,ij}^n$ – производная назад и производная вперёд функции f вдоль координатного направления ξ в узле (x_i, y_j) в момент времени $t = t_n$.

Такой способ определения величин $D_{ij,x}^n$ и $D_{ij,y}^n$ позволяет обеспечить монотонность решения на соответствующих участках монотонности сеточной функции $\{f_{ij}^n\}$ вдоль каждого координатного направления.

Далее производим разбиение каждой ячейки Ω_{ij} расчётной сетки на $N_{part}^{(x)} \times N_{part}^{(y)}$ прямоугольных подъячеек. В пределах каждой подъячейки линейная функция $f(x, y; x_i, y_j, t_n)$ заменяется средним значением, определённым в центре подъячейки, которое назовём *вертикальным столбцом*. Данная процедура проводится для каждой опорной функции системы в отдельности.

На следующем шаге для каждой ячейки Ω_{ij} на расчётной сетке выделяется четыре *фоновые подобласти*. Каждая фоновая подобласть представляет собой прямоугольник, вершинами которого являются центры рассматриваемой Ω_{ij} и трёх соседних с ней ячеек. Значение опорной функции на фоновой подобласти $\bar{f}_{i+\alpha, j+\beta}$, где $\alpha, \beta = \pm 1/2$ определяется как среднее по объёму, составленному из суммы объёмов вертикальных столбцов из ячеек, пересека-

емых фоновой подобластью. На каждой фоновой подобласти определены значения четырёх опорных функций системы: $\bar{\rho}_{i+\alpha,j+\beta}$, $\bar{u}_{i+\alpha,j+\beta}$, $\bar{v}_{i+\alpha,j+\beta}$, $\bar{p}_{i+\alpha,j+\beta}$.

Далее в пределах каждой фоновой подобласти представим линейную функцию $f(x, y; x_i, y_j, t_n)$ в виде композиции фонового значения $\bar{f}_{i+\alpha,j+\beta}$ и *усечённых вертикальных столбцов*, высота которых определяется как разность высоты вертикального столбца и фонового значения опорной функции. Каждый усечённый вертикальный столбец, в свою очередь, разделим на N_{blocks} *блоков* одинаковой высоты, которые будем отождествлять с малыми возмущениями опорной функции системы. Будем считать, что фоном для распространения таких малых возмущений является либо значение опорной функции системы на соответствующей фоновой подобласти, либо значение опорной функции на границе, разделяющей данный блок и блок, примыкающий к нему со стороны фонового значения.

Такой способ приближения линейной функции $f(x, y; x_i, y_j, t_n)$ в пределах ячейки расчётной сетки приводит к тому, что интегральный поток через границу ячейки Ω_{ij} складывается из потока, обусловленного значениями опорных функций на фоновых подобластях, пересекающих границу ячейки, и двух интегральных добавок потока, которые соответствуют фоновым подобластям, пересекающим границу ячейки. Каждая интегральная добавка потока состоит из трёх компонент, отвечающих характеристическим скоростям, с которыми вдоль соответствующего координатного направления распространяются одномерные бегущие волны малых возмущений. Бегущие волны являются решением линеаризованных уравнений газовой динамики.

Результирующее значение компоненты интегральной добавки потока определяется суммарным объёмом тех частей блоков разбиения опорных функций системы, расположенных в рассматриваемой Ω_{ij} и соседней с ней ячейке в пределах одной фоновой подобласти, которые за время Δt , двигаясь каждый со своей скоростью по своему фону, пересекли границу ячейки Ω_{ij} .

В четвёртом разделе на примере расчёта ряда одномерных задач газовой динамики производится сравнение горизонтального и вертикального разбиений опорных функций системы (см. рис. 3). Представлены результаты расчётов двумерной модельной задачи о цилиндрическом взрыве. Показано, что численное решение, полученное по квазиакустической схеме, соответству-

ет по качеству решению, полученному с помощью двумерного варианта WAF схемы, имеющей второй порядок точности (см. рис. 4). При этом для обеспечения монотонности решения и сохранения порядка аппроксимации на гладких участках решения в квазиакустической схеме, в отличие от WAF схемы, не требуется решения задачи о распаде разрыва и не используются специальные лимитерные функции.

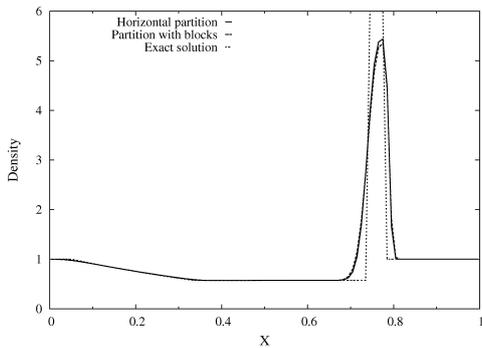


Рис. 3: Сравнение численного решения с горизонтальным разбиением (одномерный случай) и разбиением на блоки (двумерный случай, одномерное сечение).

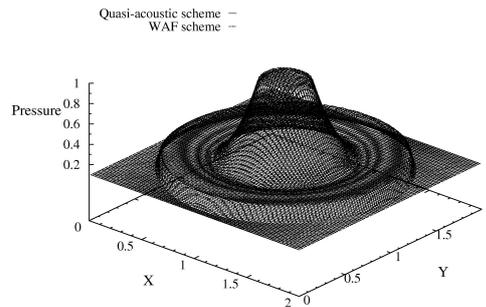


Рис. 4: Расчёт цилиндрического взрыва: сравнение численного решения, полученного с помощью квазиакустической схемы, с решением, полученным по WAF схеме.

Третья глава посвящена применению квазиакустической схемы в случае трёх пространственных измерений к решению прикладной задачи о взаимодействии газовых струй, истекающих из двигателей самолёта, с отражающим экраном-отбойником.

В первом разделе производится обобщение алгоритма на случай трёх пространственных измерений.

Второй раздел посвящен применению квазиакустической схемы к решению прикладной задачи о взаимодействии газовых струй, истекающих из двигателей самолёта, с отражающим экраном-отбойником. Данная задача имеет практическое значение: использование экранов-отбойников на пути следования истекающих газовых струй позволяет снизить негативное воздействие на окружающую среду в приземном слое атмосферы в районе аэропорта.

Процесс распространения и взаимодействия газовых струй со стенками экрана-отбойника с приемлемой точностью описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F(f)}{\partial x} + \frac{\partial G(f)}{\partial y} + \frac{\partial H(f)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

где $f = \{\rho, q^{(1)} = \rho u, q^{(2)} = \rho v, q^{(3)} = \rho w, e = \rho(\varepsilon + (u^2 + v^2 + w^2)/2)\}^T$ – вектор-столбец консервативных переменных системы, а величины $F(f) = \{\rho u, uq^{(1)} + p, uq^{(2)}, uq^{(3)}, u(e + p)\}^T$, $G(f) = \{\rho v, vq^{(1)}, vq^{(2)} + p, vq^{(3)}, v(e + p)\}^T$, $H(f) = \{\rho w, wq^{(1)}, wq^{(2)}, wq^{(3)} + p, w(e + p)\}^T$ – вектор-столбцы потоков.

Расчёт задачи производится в области Ω , имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, внутри которого расположен экран-отбойник, имеющий форму прямоугольной скобы (см. рис. 5). Прямоугольниками условно обозначены двигатели самолёта, из которых происходит истечение газовых струй. Будем считать, что двигатели самолёта работают непрерывно на протяжении всего хода эксперимента. Для численного решения системы уравнений (3) применяется квазиакустическая схема.

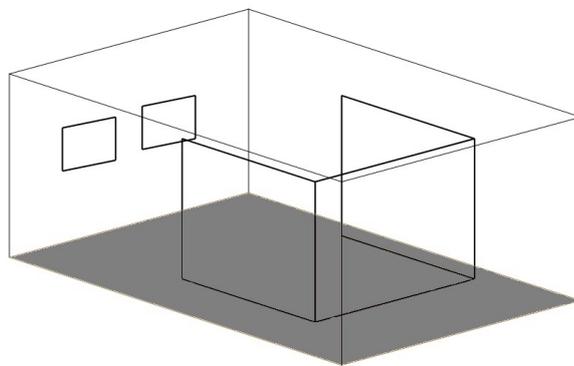


Рис. 5: Расчётная область Ω .

На границах расчётной области Ω поставлены следующие условия:

- стенки экрана-отбойника и нижняя граница расчётной области Ω считаются непроницаемыми (reflective boundaries).
- на других границах расчётной области Ω ставятся условия свободного „вытекания“ газа через границу (transmissive boundaries).

Параметры истекающих из двигателей самолёта газовых струй выбираются близкими к реальным данным.

Цель математического моделирования данной задачи состоит в том, чтобы

- выяснить качественное поведение течения во внутренней и внешней областях экрана-отбойника.
- определить суммарную (интегральную) силу давления, оказываемую газовыми струями, на стенки экрана-отбойника.

Размер и местоположение скобы выбираются таким образом, чтобы основная часть истекающих газовых струй попадала во внутреннюю область экрана-отбойника. Проведённые численные расчёты показали, что во внутренней области экрана-отбойника газовые струи, отражаясь от внутренних стенок скобы, а также взаимодействуя с набегающими струями, формируют закрученный, вихревой поток, основная часть которого устремляется вверх (см. рис. 6).

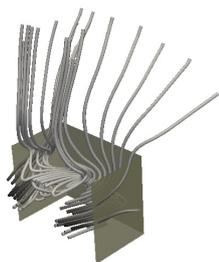


Рис. 6: Линии тока во внутренней области экрана-отбойника.

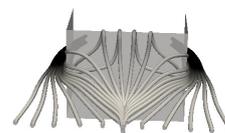


Рис. 7: Линии тока с внешней стороны экрана-отбойника.

Во внешней области экрана-отбойника в результате взаимодействия газовых струй с боковыми стенками скобы основная часть газовых струй устремляется в стороны, а небольшая их часть затекает за заднюю стенку экрана, где происходит их взаимодействие с частью вихревого потока, перетекающей через верхний край задней стенки скобы (см. рис. 7).

Проведённые численные расчёты показали, что качественно картина течения во внутренней и внешней областях скобы близка к той, что наблюдалась при проведении натуральных экспериментов.

Одним из главных факторов, который следует учитывать при проведении натуральных экспериментов, является давление, оказываемое газовыми струями, на стенки экрана-отбойника.

Результаты численных расчётов показали, что во внутренней области экрана-отбойника повышение суммарной силы давления на внутренние стороны стенок скобы наблюдается до момента времени, пока вихревое образование полностью не сформировалось. После чего происходит постепенное понижение суммарной силы давления.

Повышение суммарной силы давления на внешнюю сторону боковых стенок экрана-отбойника связано с воздействием, оказываемым газовыми струями, не попавшими во внутреннюю область скобы.

Основной вклад в результирующее значение суммарной силы давления на внешнюю сторону задней стенки скобы вносит часть газовых струй, затекающих за неё. Дополнительный вклад привносит часть вихревого потока, перетекающая через верхний край задней стенки скобы.

Разработан параллельный алгоритм, с использованием которого проведено математическое моделирование прикладной задачи на суперкомпьютере IBM eServer pSeries 690 (Regatta, 16 процессоров POWER 4 1,1 GHz). Использование параллельного алгоритма для решения прикладной задачи на сетке размером $42 \times 42 \times 42$ на 16 процессорах позволило сократить время счёта одного шага по времени почти в 16 раз по сравнению с последовательной версией. Расчёт данной задачи также проводился на сетке размером $102 \times 102 \times 102$.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработана новая явная, консервативная, однородная квазиакустическая схема для решения уравнений газовой динамики в одномерном случае, которая позволяет обеспечить монотонность решения без использования искусственных регуляризаторов.
2. Проведено обобщение предлагаемого алгоритма на случай двух и трёх пространственных измерений. На примере решения ряда тестовых задач газовой динамики показано, что численное решение, рассчитанное по квазиакустической схеме, соответствует по качеству решениям, полученным с помощью схем высокой разрешающей способности второго порядка точности.

3. Разработан параллельный алгоритм, с использованием которого проведено математическое моделирование прикладной задачи о взаимодействии газовых струй с экраном-отбойником на суперкомпьютере Regatta. Показано, что качественно картина течения близка к наблюдаемой в натуральных экспериментах. Исследованы особенности поведения течения во внутренней и внешней областях экрана-отбойника. Получены характерные зависимости суммарной (интегральной) силы давления газовых струй на стенки экрана-отбойника от времени.

Благодарность. Автор выражает благодарность своим научным руководителям докторам физико-математических наук, профессорам Антону Павловичу Фаворскому и Василию Михайловичу Головизнину за постоянное внимание к работе, И.К. Ермолаеву за любезно предоставленные данные натуральных экспериментов, а также С.И. Мухину, М.В. Абакумову, А.Ю. Мокину за ценные советы по подготовке диссертационной работы.

Список публикаций

- [1] *Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А.* Численное моделирование распространения акустических импульсов в гемодинамике // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1179 – 1187.
- [2] *Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А.* Численное моделирование распространения гемодинамических импульсов // Матем. моделирование. 2009. Т. 21, № 12. С. 21 – 34.
- [3] *Абакумов М.В., Галанина А.М., Исаков В.А., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П., Хруленко А.Б.* Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47, № 8. С. 1092 – 1098.
- [4] *Исаков В.А., Фаворский А.П.* Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики в случае двух пространственных измерений // Матем. моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 55 – 59.

- [5] *Галанина А.М., Исаков В.А., Тюрин Н.Н., Фаворский А.П.* Конструктивный подход к численному решению квазилинейных уравнений переноса // Матем. моделирование. 2013. Т. 25, № 8. С. 80 – 88.
- [6] *Исаков В.А.* Решение уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с использованием сплайн-функций // Сборник тезисов лучших дипломных работ факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. 2010. С. 34 – 36.
- [7] *Фаворский А.П., Галанина А.М., Исаков В.А.* Конструктивный подход к численному решению квазилинейных уравнений переноса // Тезисы международной молодёжной конференции-школы „Современные проблемы прикладной математики и информатики“ .г. Дубна. 22 – 27 августа 2012. С. 34.
- [8] *Исаков В.А.* Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных „Ломоносов – 2013“ . Москва. МГУ имени М.В. Ломоносова. Ф-т ВМК. 9 – 12 апреля 2013. Секция „Численные методы и математическое моделирование“ . С. 134 – 135.
- [9] *Фаворский А.П., Исаков В.А.* Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Сборник тезисов конференции „Ломоносовские чтения“ 2013. Москва. МГУ имени М.В. Ломоносова. Ф-т ВМК. 24 апреля 2013. Секция XI. С. 87 – 88.