Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Башов Максим Александрович

Минимизация тени в слое булева куба

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сапоженко Александр Антонович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов прогнозирования факультета ВМК МГУ Дьяконов Александр Геннадьевич
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ВЦ РАН Вялый Михаил Николаевич
Ведущая организация:	Институт системного программирования РАН

Защита состоится 29 ноября 2013 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за 2 дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/ в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «21» октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Костенко В. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Экстремальная комбинаторика, изучающая вопрос о максимально или минимально возможном числе объектов в классе, обладающем некоторыми свойствами, является важным разделом дискретной математики. Известными результатами в этой области являются, например, теорема Шпернера о максимальном количестве множеств, ни одно из которых не вложено в другое, или теорема Эрдёша–Ко–Радо о максимальной мощности семейства попарно пересекающихся множеств. В диссертации решаются задачи минимизации тени в булевом кубе.

Пусть $(M, \leqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество, $x \in M$. *Нижней тенью* элемента x называется множество непосредственно предшествующих ему элементов: $\Delta x = \{y \in M \mid y \lessdot x\}$. *Верхней тенью* элемента x называется множество непосредственно следующих за ним элементов: $\nabla x = \{y \in M \mid y \gtrdot x\}$. *Двусторонняя тень* $⧖x$ — это объединение множеств Δx и ∇x. Тенью множества $X \subseteq M$ называется объединение теней его элементов: $\Delta X = \bigcup_{x \in X} \Delta x$, $\nabla X = \bigcup_{x \in X} \nabla x$, $⧖X = \bigcup_{x \in X} ⧖x$.

Задача минимизации тени заключается в том, чтобы в некотором заданном семействе $\mathcal{X}$ подмножеств M найти множество, имеющее минимальную мощность тени. Обычно частично упорядоченное множество M является ранжированным, а в качестве семейства $\mathcal{X}$ рассматривается семейство подмножеств фиксированной мощности, вложенных в слой множества M.

Подобные задачи возникают, например, при перечислении комбинаторных объектов, таких как монотонные булевы функции[1] или независимые множества в графах[2], в теории надёжности сетей[3].

Будем обозначать через $[n]$ множество n первых натуральных чисел $\{1, \ldots, n\}$. Под n-мерным булевым кубом будем понимать семейство $2^{[n]}$ всех подмножеств множества $[n]$ с отношением частичного порядка $\subseteq$. Через $\binom{[n]}{k}$ обозначим k-й слой n-мерного булева куба, то есть семейство всех k-элементных подмножеств $[n]$.

---

[1] Сапоженко А. А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. М., Физматлит, 2009.

[2] Alon N. Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups // *Israel Journal of Mathematics.* 1991. 73(2). P. 247–256.

[3] Brecht T. B., Colbourn C. J. Lower bounds on two-terminal network reliability // *Discrete Applied Mathematics.* 1988. 21(3). P. 185–198.

Решения задачи минимизации односторонней тени в слое булева куба были независимо описаны Дж. Краскалом[4] и Д. Катоной[5].

Теорема (Дж. Краскал, Д. Катона)**.** *Начальный лексикографический отрезок* $\binom{[n]}{k}$ *длины* m *минимален по нижней тени, то есть имеет наименьший размер нижней тени среди всех подмножеств слоя мощности* m*. Конечный лексикографический отрезок* $\binom{[n]}{k}$ *длины* m *минимален по верхней тени, то есть имеет наименьший размер верхней тени среди всех подмножеств слоя мощности* m*.*

М. Мёрс[6] и независимо З. Фюреди и Дж. Р. Григгс[7] установили необходимое условие существования минимальных семейств, не изоморфных лексикографическим отрезкам.

Теорема (М. Мёрс, З. Фюреди и Дж. Р. Григгс)**.** *Начальный лексикографический отрезок* $\binom{[n]}{k}$ *длины* m *является единственным с точностью до изоморфизма минимальным по нижней тени семейством мощности* m *в случае, когда мощность нижней тени отрезка длины* $m+1$ *превосходит мощность тени отрезка длины* m*.*

Известны также следующие результаты, описывающие структуру «почти минимальных» по односторонней тени семейств.

Теорема (П. Киваш[8])**.** *Пусть* $\varepsilon > 0$, $k \geqslant 1$ *и* $0 \leqslant \delta < \delta(\varepsilon, k)$*. Пусть* $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$, $|\Delta\mathcal{F}| = \binom{x}{k-1}$ *и* $|\mathcal{F}| = (1-\delta)\binom{x}{k}$*. Тогда найдётся такое множество* S, $|S| = \lceil x \rceil$*, что число множеств* $A \in \Delta\mathcal{F}$*, для которых выполнено* $A \not\subseteq S$*, не превосходит* $\varepsilon \cdot \binom{x}{k-1}$*.*

Теорема (Р. О'Доннелл, К. Виммер[9])**.** *Пусть* $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *и* $\varepsilon \leqslant \frac{k}{n}$*.*

[4] Kruskal J. The number of simplices in a complex // *Mathematical Optimization Techniques*, Berkeley – Los Angeles: Univ. of California Press. 1963. P. 251–278.

[5] Katona G. O. H. A theorem of finite sets // *Proceedings of Tihany Conference*, New York: Academic Press. 1966. P. 187–207.

[6] Mörs M. A generalization of a theorem of Kruskal // *Graphs and Combinatorics.* 1985. 1. P. 167–183.

[7] Füredi Z., Griggs J. R. Families of finite sets with minimal shadows // *Combinatorica.* 1986. 6(4). P. 355–363.

[8] Keevash P. Shadows and intersections: Stability and new proofs // *Advances in Mathematics.* 2008. 218(5). P. 1685–1703.

[9] O'Donnell R., Wimmer K. KKL, Kruskal-Katona, and monotone nets. // *Foundations of Computer Science*, 2009. P. 725–734.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$, *и* $\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{k}} \leqslant 1 - \varepsilon$. *Тогда либо выполнено*

$$\frac{|\nabla \mathcal{F}|}{\binom{n}{k+1}} \geqslant \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{k}} + \delta \cdot \frac{\log n}{n},$$

либо найдётся $i \in [n]$, *для которого*

$$\frac{|\{A \in \mathcal{F} \mid i \in A\}|}{|\mathcal{F}|} - \frac{|\{A \in \mathcal{F} \mid i \notin A\}|}{|\mathcal{F}|} \geqslant \frac{1}{n^{\varepsilon}}.$$

Известно несколько обобщений теоремы Краскала–Катоны. Булев куб можно рассматривать как декартово произведение цепей длины 2 или как произведение однолучевых звёзд. Дж. Клементс и Б. Линдстрём[10] доказали, что лексикографические отрезки слоя имеют минимальную одностороннюю тень в декартовых произведениях цепей произвольной длины. Б. Линдстрём[11] обобщил теорему Краскала–Катоны на случай декартовых степеней двухлучевой звезды, то есть частично упорядоченного множества $\{0, 1, 2\}$, в котором $0 > 1$, $0 > 2$, а 1 и 2 несравнимы. С. Л. Безруков[12] установил справедливость обобщения для декартова произведения звёзд с произвольным числом лучей. П. Франкл, Ж. Калаи и З. Фюреди[13] получили обобщение для частично упорядоченного множества, двойственного произведениям звёзд, для некоторых значений параметров. Справедливость этого результата для произвольных значений параметров следует из общей теории, развитой С. Л. Безруковым и У. Леком[14]. С. Л. Безруков и Р. Элсассер[15] обобщили теорему Краскала–Катоны на случай произведения регулярных пауков — частично упорядоченных множеств, являющихся обобщением звёзд.

Аналоги теоремы Краскала–Катоны, то есть описания решений задачи минимизации тени в виде отрезков некоторого линейного порядка, доказаны также для других частично упорядоченных множеств. Р. Алсведе, А. Айди-

[10] Clements G. F., Lindström B. A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // *Journal of Combinatorial Theory.* 1969. 7. P. 230–238.

[11] Lindström B. The optimal number of faces in cubical complexes // *Arkiv för Matematik.* 1971. 8. P. 245–257.

[12] Безруков С. Л. Минимизация теней подмножеств полурешетки частичных отображений // *Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем.* 1987. С. 3–18.

[13] Frankl P., Kalai G., Füredi Z. Shadows of colored complexes // *Mathematica Scandinavica.* 1988. 63(2). P. 169–178.

[14] Bezrukov S. L., Leck U. Macaulay posets // *Electron. J. Combin.* 2004. Dynamic Survey DS12.

[15] Bezrukov S. L., Elsässer R. The spider poset is Macaulay // *Journal of Combinatorial Theory.* 2000. 90(1). P. 1–26.

нян и Л. Хачатрян[16] рассмотрели задачу для булева куба с ограничениями. С. Л. Безруков[17], Дж. Кёрнер и В. Вей[18], Х. Тирсма[19] доказали аналог теоремы Краскала–Катоны в двуслойном частично упорядоченном множестве, один из слоёв которого состоит из двоичных наборов фиксированной длины с чётным числом единиц, а другой — из двоичных наборов с нечётным числом единиц, и сравнимыми являются наборы, расстояние Хэмминга между которыми равно 1. У. Лек[20] доказал аналогичную теорему для порядка подматриц — декартова произведения булевых кубов с удалённой наибольшей точкой.

Р. Алсведе и Н. Каи[21], Д. Дайкин и Т. Дан[22] доказали существование минимизирующего тень порядка для так называемого порядка подслов $SO(2)$ — множества слов в алфавите из двух символов, частичный порядок на котором введён следующим образом: слово $\widetilde{\alpha}$ предшествует слову $\widetilde{\beta}$, если $\widetilde{\alpha}$ можно получить из $\widetilde{\beta}$ удалением символов. У. Лек[23] показал, что для порядка $SO(n)$ в алфавите из $n > 2$ символов не существует аналога теоремы Краскала–Катоны, то есть решения задачи минимизации тени в этом частично упорядоченном множестве нельзя описать в терминах линейного порядка. Р. Алсведе и В. С. Лебедев[24] рассматривали задачу минимизации тени в множестве слов в алфавите из двух символов с отношением слово-подслово.

Изучаемая в диссертации задача минимизации двусторонней тени для булева куба до сих пор не рассматривалась.

С задачей минимизации тени тесно связаны изопериметрические задачи на графах. Пусть $G = (V, E)$ — граф, $A \subseteq V$ — некоторое множество

[16] Ahlswede R., Aydinian H., Khachatrian L. H. More about shifting techniques // *European J. Combin.* 2003. 24(5). P. 551–556.

[17] Безруков С. Л. Об одной изопериметрической задаче // *Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем.* 1983. 40. С. 3–18.

[18] Körner J., Wei V. K. Odd and even Hamming spheres also have minimum boundary // *Discrete Mathematics.* 1984. 51 (2). P. 147–165.

[19] Tiersma H. J. A note on Hamming spheres // *Discrete Mathematics.* 1985. 54(2). P. 225–228.

[20] Leck U. Optimal shadows and ideals in submatrix orders // *Discrete Mathematics.* 2001. 235(1). P. 173–188.

[21] Ahlswede R., Cai N. Shadows and isoperimetry under the sequence-subsequence relation // *Combinatorica.* 1997. 17. P. 11–29.

[22] Danh T. N., Daykin D. E. Ordering integer vectors for coordinate deletions // *Journal of the London Mathematical Society.* 1997. 55(3). P. 417–426.

[23] Leck U. Nonexistence of a Kruskal-Katona type theorem for subword orders // *Combinatorica.* 2004. 24(2). P. 305–312.

[24] Ahlswede R., Lebedev V. S. Shadows under the word-subword relation // *Problems of Information Transmission.* 2012. 48(1). P. 31–46.

его вершин. Границей множества A называется множество вершин $\Gamma(A) = \{v \in A \mid \exists w \notin A, (v, w) \in E(G)\}$. Вершинный вариант изопериметрической задачи заключается в нахождении множества вершин заданной мощности с минимальным размером границы. Рёберные варианты изопериметрической задачи заключаются в нахождении множества вершин A заданной мощности с максимально возможным числом внутренних рёбер $I(A) = \{(a_1, a_2) \in E(G) \mid a_1 \in A, a_2 \in A\}$, либо с минимальным числом внешних рёбер $O(A) = \{(a, b) \in E(G) \mid a \in A, b \notin A\}$. Для регулярного графа эти две задачи эквивалентны, поскольку в k-регулярном графе для любого множества A верно $I(A) + O(A) = k \cdot |A|$.

Решения изопериметрических задач в булевом кубе, то есть в графе $(2^{[n]}, \{(A, B) \mid A \subseteq B \in 2^{[n]}, |A| = |B| - 1\})$, были найдены Л. Харпером[25].

Теорема (Л. Харпер). *Пусть* $m = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + m_0$, $0 \leqslant m_0 < \binom{n}{k+1}$. *Пусть* $\mathcal{F}$ *является квазисферой мощности* m, *то есть объединением семейств* $\binom{[n]}{i}$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k$ *и конечного лексикографического отрезка* $\binom{[n]}{k+1}$ *длины* m_0. *Тогда для любого* $\mathcal{G} \subseteq 2^{[n]}$, $|\mathcal{G}| = m$, *выполнено* $|\Gamma(\mathcal{G})| \geqslant |\Gamma(\mathcal{F})|$.

Теорема (Л. Харпер). *Пусть* $\mathcal{F}$ *— начальный лексикографический отрезок* $2^{[n]}$ *длины* m. *Тогда для любого* $\mathcal{G} \subseteq 2^{[n]}$, $|\mathcal{G}| = m$ *выполнено* $|I(\mathcal{G})| \leqslant |I(\mathcal{F})|$.

Заметим, что теорема Краскала–Катоны является следствием решения вершинно-изопериметрической задачи.

С. Л. Безруков[26, 27] описал все попарно не изоморфные решения вершинно-изопериметрической задачи в булевом кубе для некоторых значений параметров. Р. Алсведе и Н. Каи[28] описали решения изопериметрической задачи в графе, являющемся диаграммой Хассе порядка подслов $SO(2)$.

Примером изопериметрической задачи, решения которой в общем случае не удаётся описать в виде отрезков некоторого порядка, является задача Клейтмана–Веста. В этой задаче рассматривается граф с множеством вершин

[25] Harper L. H. Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs // *Journal of Combinatorial Theory.* 1966. 1. P. 385–393.

[26] Безруков С. Л. О построении решений дискретной изопериметрической задачи в хэмминговом пространстве // *Математический сборник.* 1988. 135(1). С. 80–95.

[27] Bezrukov S. L. Isoperimetric problems in discrete spaces // *Extremal Problems for Finite Sets*, Bolyai Soc. Math. Stud. Budapest, 1994. P. 59–91.

[28] Ahlswede R., Cai N. Isoperimetric theorems in the binary sequences of finite length // *Appl. Math. Lett.* 1998. 11. P. 121–126.

$\binom{[n]}{k}$ и множеством рёбер $\{(A,B) \mid |A\cap B| = k-1\}$. Р. Алсведе и Д. Катона[29] рассмотрели случай $k = 2$ и показали, что решения принадлежат к одному из двух классов множеств. При $k > 2$ решение задачи для произвольной мощности множества неизвестно. Л. Харпер[30] получил решения некоторых мощностей с помощью сведения исходной задачи к задаче минимизации веса идеала частично упорядоченного множества и рассмотрения её непрерывного аналога.

Рёберно-изопериметрические задачи часто удаётся переформулировать в терминах задач минимизации веса идеала в частично упорядоченном множестве. Р. Алсведе и Д. Катона[31] описали решения этой задачи в булевом кубе для монотонных и унимодальных симметрических функций.

Теорема (Р. Алсведе, Д. Катона). *Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ — идеал, то есть если $A \in \mathcal{F}$ и $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{F}$. Пусть $K_i = \big|\{A \in \mathcal{F} \mid |A| = i\}\big|$, и $f(\mathcal{F}) = \sum\limits_i K_i W_i$. Тогда $\min\limits_{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=m} f(\mathcal{F})$ достигается на следующих семействах:*

1. *если $W_0 \leqslant W_1 \leqslant \ldots \leqslant W_n$, то минимум достигается на квазисфере мощности m;*

2. *если $W_0 \geqslant W_1 \geqslant \ldots \geqslant W_n$, то минимум достигается на начальном лексикографическом отрезке семейства $2^{[n]}$ мощности m;*

3. *если $W_0 \leqslant W_1 \leqslant \ldots \leqslant W_q \geqslant W_{q+1} \geqslant \ldots \geqslant W_n$, то минимум достигается на объединении некоторой квазисферы и некоторого начального лексикографического отрезка;*

4. *если $W_0 \geqslant W_1 \geqslant \ldots \geqslant W_q \leqslant W_{q+1} \leqslant \ldots \leqslant W_n$, то минимум достигается на пересечении некоторой квазисферы и некоторого начального лексикографического отрезка;*

С. Л. Безруков и В. П. Воронин[32] обобщили этот результат на декартовы произведения цепей произвольной длины.

---

[29] Ahlswede R., Katona G. O. H. Graphs with maximal number of adjacent pairs of edges // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1978. 32. P. 97–120.

[30] Harper L. H. On a problem of Kleitman and West // *Discrete Mathematics.* 1991. 93(2). P. 169-182.

[31] Ahlswede R., Katona G. O. H. Contributions to the geometry of Hamming spaces // *Discrete Mathematics.* 1977. 17(1). P. 1–22.

[32] Безруков С. Л., Воронин В. П. Экстремальные идеалы решётки мультимножеств для симметрических функционалов // *Дискретная математика.* 1990. 2(1). P. 50–58.

Цель работы: исследование задачи минимизации двусторонней тени подмножества слоя булева куба.

Методы исследования. Результаты диссертации получены с помощью методов экстремальной комбинаторики. Используется метод операторов сдвига и обобщение метода Алсведе–Катоны для решения задачи минимизации веса идеала частично упорядоченного множества с невозрастающей весовой функцией.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты:

1. Показано, что задачи минимизации односторонней и двусторонней тени в слое булева куба сводятся к задачам минимизации веса идеала.
2. Описаны решения задачи минимизации двусторонней тени произвольной мощности в k-м слое n-мерного булева куба при $k \leqslant 2$ и при $k \geqslant n-2$.
3. Получены верхние оценки мощности максимальной системы вложенных решений задачи минимизации двусторонней тени, и показано, что за исключением случая $n = 6$, $k = 3$, при $3 \leqslant k \leqslant n-3$ в k-м слое n-мерного булева куба не существует минимизирующего двустороннюю тень линейного порядка.
4. В k-м слое n-мерного булева куба для произвольных n, k описаны решения задачи минимизации двусторонней тени мощности, не превосходящей $2+k(n-k)$, образующие систему вложенных множеств. Показано, что решение мощности $1+k(n-k)$ единственно с точностью до изоморфизма.
5. При $k = n/2$ и при малых значениях k описано минимальное по двусторонней тени семейство мощности $2k(n-k)-n+2$.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Для некоторых мощностей описаны решения минимизации двусторонней тени в слое булева куба. Полученные методы могут применяться при решении экстремальных комбинаторных задач.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ, в том числе 3 работы [1; 3; 6] в рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

— на семинаре «Дискретный анализ» под руководством А. А. Сапоженко, Т. В. Андреевой и А. Б. Дайняка (кафедра математической кибернетики ВМК МГУ) в 2010–2013 гг.;

— на семинаре по теории кодирования добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН под руководством Л. А. Бассалыго в 2011 г.;

— на семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» под руководством В. Б. Алексеева, А. А. Сапоженко и С. А. Ложкина (кафедра математической кибернетики ВМК МГУ) в 2013 г.;

— на ежегодной международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010»;

— на XI международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 18–23 июня 2012 г.).

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 59 наименований. Диссертация содержит 73 страницы.

Краткое содержание работы

Во введении приводится обзор исследований, связанных с темой диссертации, и кратко излагается содержание работы.

В первой главе описывается сведение задачи минимизации тени подсемейства слоя булева куба к задаче минимизации веса идеала частично упорядоченного множества.

В разделе 1.1 определяется оператор сдвига, действующий на классе подсемейств слоя булева куба, и доказываются его свойства. В частности, показывается, что оператор сдвига не меняет мощность семейства и не увеличивает мощности его теней. В разделе 1.2 устанавливается необходимое и достаточное условие того, что размер тени семейства уменьшается при применении оператора сдвига. В разделе 1.3 вводится порождённый на слое булева куба оператором сдвига частичный порядок $\sqsubseteq$ и устанавливаются его свойства.

Пусть A и B — элементы $\binom{[n]}{k}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, и $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$. Множество A предшествует множеству B в порядке $\sqsubseteq$, если $a_i \leqslant b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Показывается, что при решении задачи минимизации можно, не ограничивая общности, рассматривать только идеалы данного частичного порядка, то есть такие семейства $\mathcal{F}$, для которых из $A \in \mathcal{F}$ и $B \sqsubseteq A$ следует $B \in \mathcal{F}$. Доказывается, что если двусторонние тени двух множеств имеют непустое пересечение, то эти множества сравнимы в частичном порядке. Устанавливается, что лексикографический порядок является линейным расширением введённого частичного порядка.

В разделе 1.4 выводятся формулы для вычисления размера тени идеала.

Теорема. [1] *Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ — идеал. Тогда размеры теней $\mathcal{F}$ вычисляются по формулам $|\Delta\mathcal{F}| = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} s_l(A)$, $|\nabla\mathcal{F}| = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} s_u(A)$, $|\between\mathcal{F}| = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} s(A)$, где $s_l(A) = \min([n] \setminus A) - 1$, $s_u(A) = n - \max A$, $s(A) = s_l(A) + s_u(A)$.*

В разделе 1.5 описываются решения задачи минимизации веса идеала для некоторого класса весовых функций, включающего функции, соответствующие нижней и верхней тени.

Теорема. [6] *Пусть $f\colon [0,k] \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Тогда начальный лексикографический отрезок $\binom{[n]}{k}$ минимизирует весовую функцию $f(s_l)$.*

В разделе 1.6 описываются минимальные по двусторонней тени семейства в крайних слоях булева куба.

Теорема. [3] *Если $k \leqslant 2$, то конечный лексикографический отрезок $\binom{[n]}{k}$ является минимальным по двусторонней тени семейством. Если $k \geqslant n-2$, то начальный лексикографический отрезок $\binom{[n]}{k}$ является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Во второй главе доказывается несуществование аналога теоремы Краскала–Катоны для задачи минимизации двусторонней тени в центральных слоях булева куба, то есть несуществование линейного порядка на слое булева куба, все начальные отрезки которого минимизируют двустороннюю тень. В разделе 2.1 доказываются свойства частично упорядоченного множества, к минимизации веса идеалов которого сводится задача минимизации тени. В разделе 2.2 устанавливаются свойства минимизирующего порядка. В разделе 2.3 показывается, что в центральных слоях булева куба никакой порядок, обладающий этими свойствами, не является минимизирующим, и оценивается максимальный размер системы вложенных решений.

Теорема. [1] *При $n \geqslant 7$ никакой линейный порядок на $\binom{[n]}{3}$ не минимизирует двустороннюю тень. Для любого линейного порядка, заданного на $\binom{[n]}{3}$, существует такое число $m \leqslant \max\{4n-14, 15\}$, что начальный отрезок этого порядка длины m не является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Теорема. [5] *При $4 \leqslant k < \frac{n}{2}$ никакой линейный порядок на $\binom{[n]}{k}$ не минимизирует двустороннюю тень. Для любого линейного порядка, заданного на $\binom{[n]}{k}$, существует такое число $m \leqslant 1 + k(n-k) + (k-1)(2n-2k-3)$, что начальный отрезок этого порядка длины m не является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Теорема. [5] *При $4 \leqslant k = \frac{n}{2}$ никакой линейный порядок на $\binom{[n]}{k}$ не минимизирует двустороннюю тень. Для любого линейного порядка, заданного на $\binom{[n]}{k}$, существует такое число $m \leqslant 1 + k^2 + (2k-3)(k-2) + \frac{k(k-1)^2}{2}$, что начальный отрезок этого порядка длины m не является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Третья глава посвящена описанию семейств, минимизирующих двустороннюю тень, в центральных слоях. В разделе 3.1 доказываются вспомогательные утверждения. В разделе 3.2 доказывается, что пересечение слоя $\binom{[n]}{k}$ и шара Хэмминга с радиусом 2 и центром $A \in \binom{[n]}{k}$ является минимальным по двусторонней тени семейством. Обозначим это семейство через $\mathcal{C}_1(A)$, и положим $\mathcal{C}_1(n,k) = \mathcal{C}_1(\{1,2,\ldots,k\}) \subseteq \binom{[n]}{k}$.

Теорема. [1] $\mathcal{C}_1(n,k)$ — *единственный минимальный по двусторонней тени идеал мощности* $1+k(n-k)$.

Теорема. [1] *Если* $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ *— минимальное по двусторонней тени семейство мощности* $1+k(n-k)$*, то* $\mathcal{F} = \mathcal{C}_1(A)$ *для некоторого* $A \in \binom{[n]}{k}$.

В разделе 3.3 описываются минимальные по двусторонней тени семейства малой мощности, образующие систему вложенных семейств.

Теорема. [1] *Если* $k \geqslant \frac{n}{2}$*, то начальные лексикографические отрезки* $\mathcal{C}_1(n,k)$ *являются минимальными по двусторонней тени.*

Теорема. [2] *Если* $2 \leqslant k \leqslant n-2$*, то семейство*

$$\mathcal{C}_1'(n,k) = \mathcal{C}_1(n,k) \cup \big\{\{1,2,\ldots,k-2,k+1,k+2\}\big\}$$

является минимальным по двусторонней тени.

В разделе 3.4 для некоторых значений параметров описывается минимальное по двусторонней тени семейство мощности $2k(n-k)-n+2$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{C}_1}(n,k)$ идеал $\big\{A \in \binom{[n]}{k} \mid A \sqsubseteq \{2,3,\ldots,k-1,k+1,n\}\big\}$.

Теорема. [3] $\widehat{\mathcal{C}_1}(n,n/2)$ *является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Теорема. [3] *Если* $n \geqslant 13$*, то* $\widehat{\mathcal{C}_1}(n,3)$ *является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Теорема. [3] *Если* $n \geqslant \frac{1}{2}k^4$*, то* $\widehat{\mathcal{C}_1}(n,k)$ *является минимальным по двусторонней тени семейством.*

В разделе 3.5 доказываются некоторые свойства пересечения слоя с шаром Хэмминга с радиусом 4 и центром в слое. Показывается, что при $k=3$ такое семейство является минимальным по двусторонней тени.

Обозначим через $\mathcal{C}_r(n,k)$ семейство $\{A \mid A \cap [k] \geqslant n-r\}$, то есть пересечение слоя с шаром Хэмминга с радиусом $2r$.

Теорема. [6] $\mathcal{C}_2(n,3)$ *является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Публикации по теме диссертации

1. Башов М. А. Минимизация двусторонней тени в единичном кубе // *Дискретная математика.* 2011. 23. №4. С. 115–132.

2. Bashov M. Minimal families in terms of double-sided shadow in the Boolean cube layer // *Electronic Notes in Discrete Mathematics.* 2011. 38. P. 117–122.

3. Башов М. А. Минимальные по двусторонней тени подмножества булева куба, отличные от круга // *Дискретный анализ и исследование операций.* 2012. 19. №5. С. 3–20.

4. Башов М. А. Несуществование аналога теоремы Краскала–Катоны для задачи минимизации двусторонней тени // *Материалы XI международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящённого 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова* (*Москва, 18-23 июня 2012г.*). М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 227–230.

5. Bashov M. Nonexistence of a Kruskal–Katona type theorem for double-sided shadow // *Acta Sapientiae Informatica.* 2013. 5(1). P. 53–62.

6. Башов М. А. Минимизация веса идеалов в слое булева куба // *Вестник Московского университета. Серия 15: вычислительная математика и кибернетика.* 2013. №3. С. 69–77.