МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

АБДУКАРИМОВ МАХМАДСАЛИМ ФАЙЗУЛЛОЕВИЧ

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова Крицков Леонид Владимирович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет МЭИ» Бободжанов Абдухафиз Абдурасулович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова Потапов Михаил Михайлович.
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов

Защита диссертации состоится 20 ноября 2013 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. +7 (495) 939-5071 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» - «Д 501.001.43».

Автореферат разослан ______________________

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43,
доктор физико-математических наук, профессор Е.В.Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. С задачей граничного управления процессом, описываемым волновым и телеграфным уравнениями, связаны многие практические задачи, в частности, задачи акустики, управление давлением нефти или газа в трубопроводе и т.п. Ввиду этого изучение таких задач управления является одной из актуальных с точки зрения возможных ее приложений.

Математическая постановка задачи граничного управления формулируется в терминах начально-краевых задач для уравнения, описывающего рассматриваемый процесс.

В 1988 году Ж. Л. Лионс провел изучение граничного управления колебаниями в форме смешанных задач для волнового уравнения. В его статье[1] изучалась задача успокоения (т.е. приведение колебательной системы в состояние с нулевыми данными Коши) с граничными условиями Дирихле. Им же в этой работе с помощью теории гильбертовых пространств была доказана неединственность решения полученной задачи при $T > 2l$, где l – длина струны, в терминах обобщенного решения из класса L_2.

В работе Е. Зуазуа[2] идея Лионса была обобщена на случай квазилинейного волнового уравнения с асимптотически линейной нелинейностью, частным случаем которой является задача граничного управления для телеграфного уравнения.

В монографии А. Г. Бутковского[3] задача граничного управления была исследована с помощью метода Фурье и метода моментов. Тем самым, искомое граничное управление было построено в виде ряда Фурье.

В работе А. Е. Егорова[4] для конструктивного решения задачи граничного управления был использован метод падающих и отраженных волн.

В статье Ф. П. Васильева[5] была предложена трактовка теории двойствен-

[1] Lions J. L. *Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems* // SIAM Review, 1988, vol. 30, No. 1, p. 1-68.

[2] Zuazua E. *Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation* // J. Math. pures et appl., 69, 1990, p. 1-31.

[3] Бутковский А. Г. *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1965.

[4] Егоров А.И. *Управление упругими колебаниями* // ДАН УССР, серия физ-мат. и техн. наук, 1986, №5, с. 60-63.

[5] Васильев Ф. П. *О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения* // Дифференц. уравнения, 1995, т. 31, №11, с. 1893 - 1900.

ности в линейных задачах управления и наблюдения. Решению задач граничного управления процессом колебаний функциональными методами посвящены также его совместные работы[6,7,8] с М. М. Потаповым, А. В. Разгулиным и М. А. Куржанским, в которых построены эффективные численные алгоритмы нахождения искомого граничного управления. Приближенным методам решения задачи граничного управления для волнового уравнения посвящены также недавние работы М. М. Потапова[9,10]. Дальнейшие ссылки на связанные с этой тематикой публикации могут быть найдены в обзорной книге[6].

Отметим, что в упомянутых исследованиях теорема существования искомого граничного управления доказывается лишь для промежутка времени T, строго большего порога единственности, и явного аналитического выражения для этого управления не было предложено.

В работе В. А. Ильина[11] впервые для любого T из интервала $0 < T < l$ установлены необходимые и достаточные условия существования и указан явный вид граничных управлений смещениями на двух концах, а для случая $T > l$ (точнее, для случая $l < T \leqslant 2l$) приведен общий вид возможных граничных управлений, включающий две произвольные постоянные и четыре произвольные функции из класса W_2^2 на сегменте по переменной t длины $T - l$, которые обеспечивают переход колебательного процесса, описываемого однородным волновым уравнением

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \;\; 0 < x < l, \; 0 < t < T, \tag{1}$$

из произвольного начального состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\, u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в наперед заданное финальное состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x),\, u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$.

[6]Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В. *Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения.* М.: Макс Пресс, 2010.

[7]Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М. *Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнений колебаний струны* // Вестник МГУ, сер. 15, вычисл. матем. и киб., 1993, № 3, с. 8–15.

[8]Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Разгулин А. В. *О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны* // Вестник МГУ, сер. 15, вычисл. матем. и киб., 1993, № 2, с. 3–8.

[9]Потапов М. М. *Приближенное решение задач Дирихле - управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения* // ЖВМиМФ, 2006, т.46, №12, с. 2191–2208.

[10]Потапов М. М. *Разностная аппроксимация задач Дирихле – наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями третьего рода* // ЖВМиМФ, 2007, т.47, №8, с. 1323–1339.

[11]Ильин В. А. *Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени* // Дифференц. уравнения, 1999, т. 35, №11, с. 1517–1534.

В этой работе при изучении задачи важную роль играет класс $\widehat{W}_2^2[0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, впервые введенный В. А. Ильиным в статье[12]. Аналогичный результат В. А. Ильиным получен и в случае, когда управление действует на одном конце струны при закрепленном втором[13].

Позднее, В. А. Ильин исследовал задачи граничного управления в терминах обобщенного решения (1) из класса, допускающего существование конечной энергии.

В совместной работе В. А. Ильина и Е. И. Моисеева[14] изучена задача граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0, \;\; 0 < x < l, \;\; 0 < t < T, \;\; c = const, \qquad (2)$$

при времени, равном критическому: $T = 2l$. В[15] ими же рассмотрена аналогичная задача в случае, когда управления действуют на обоих концах.

В диссертации И. Н. Смирнова[16] исследована задача граничного управления смещениями на двух концах для уравнения (2) в случае, когда отрезок $[0, l]$ состоит из двух участков, на которых рассматриваемый процесс имеет разные физические параметры. В этой работе для уравнения (2) также изучены некоторые постановки смешанных задач.

Теорией граничного управления процессом, описываемым волновым уравнением (1), как для локальных, так и для нелокальных смешанных задач занимаются также ученики В. А. Ильина и Е. И. Моисеева: В. В. Тихомиров, П. А. Рево, Г. Д. Чабакаури, А. А. Никитин, А. А. Кулешов, А. А. Холомеева, Л. Н. Знаменская, А. В. Беликов и др.

Настоящая диссертация посвящена исследованию двух типов задач: 1) задачи граничного управления для уравнения вынужденных колебаний струны, т.е.

---

[12] Ильин В. А., Тихомиров В. В. *Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса* // Дифференц. уравнения, 1999, т. 35, №5, с. 692–704.

[13] Ильин В. А. *Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце* // Дифференц. уравнения, 1999, т. 25, № 12, с. 1640–1659.

[14] Ильин В. А., Моисеев Е. И. *О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением* // Докл. РАН, 2002, т. 387, №5, с. 600–603.

[15] Ильин В. А., Моисеев Е. И. *Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением* // Докл. РАН, 2004, т. 394, №2, с. 154–158.

[16] Смирнов И. Н. *Управление процессом, описываемым телеграфным уравнением* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, М: МГУ, 2011.

для уравнения (1) с правой частью $f(x,t)$:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \tag{1'}$$

и 2) задачи граничного управления для уравнения Клейна–Гордона–Фока с переменным коэффициентом, т.е. для уравнения (2) с коэффициентом c, зависящим от x и t:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = 0. \tag{2'}$$

Цель диссертационной работы. Основными целями диссертации являются изучение задач граничного управления, производимого смещением для уравнения вынужденных колебаний струны при произвольном моменте времени T, и исследование задач граничного управления, производимого смещением для уравнения Клейна–Гордона–Фока с переменным коэффициентом при времени, меньшем или равном критическому.

Методы исследования. В работе используются методы математической физики, функционального анализа и теории линейных интегральных уравнений типа Вольтерры второго рода.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Вкратце, перечислим основные результаты:

1. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования единственного граничного управления для процесса вынужденных колебаний струны в случае: а) действия управления на одном конце при закрепленном втором; б) действия управления на одном конце при свободном втором; в) действий управлений на обоих концах при времени, меньшем или равном критическому. Во всех случаях искомое граничное управление представлено в явном аналитическом виде.

2. Для всех указанных задач получен явный аналитический вид оптимального граничного управления, доставляющего минимум интегралу граничной энергии при времени, большем критического.

3. Исследована разрешимость некоторых смешанных задач для уравнения Клейна–Гордона–Фока с переменным коэффициентом.

4. Найдены необходимые и достаточные условия существования единственного граничного управления для процесса, описываемого уравнением Клейна–Гордона–Фока с переменным коэффициентом в случае: а) действия управления на одном конце при закрепленном втором; б) действия управления на одном конце при свободном втором; в) действий управлений на обоих концах при времени, равном критическому.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты можно использовать при чтении спецкурсов для старшекурсников специальности математики и физики. Кроме того, учитывается, что полученные результаты также могут быть использованы для моделирования различных процессов, описываемых рассмотренными уравнениями.

Апробация результатов. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

– на научном семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академиков В. А. Ильина и Е. И. Моисеева;

– на научном семинаре кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Ф. П. Васильева;

– на ежегодных международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012» , «Ломоносов-2013» (Москва, 2012 и 2013 гг.);

– на ежегодной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 2013 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 13 работах, 6 из которых – в изданиях, рекомендованных ВАК. Список опубликованных работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы, включающего 45 наименование. Каждая глава содержит несколько параграфов. Нумерация утверждений, теорем, лемм, замечаний и формул – сквозная по каждой главе. Текст диссертации изложен на 117 страницах.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводится краткий обзор уже существующих результатов, касающихся темы диссертации и кратко описывается содержание работы.

В **первой главе** изучается вопрос о граничном управлении, производимом смещением для уравнения вынужденных колебаний струны

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \times (0 \leqslant t \leqslant T) = Q_T, \tag{1}$$

на конце $x = 0$ при условии, что конец $x = l$ закреплен, т. е.

$$u(l,t) \equiv 0 \ \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Глава состоит из четырех параграфов. В первом параграфе приведены постановка задачи, необходимые определения и вспомогательные утверждения.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость точек струны заданы равенствами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \text{ при } \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

а в момент времени $t = T$ – соответственно, равенствами

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{4}$$

В задаче (1), (3) и (4) предполагается, что $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$.

Решение полученной задачи граничного управления (1)–(4) будем искать в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, впервые введенном В. А. Ильиным в работе[17]. Из принадлежности обобщенного решения $u(x,t)$ задачи (1)–(4) классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ вытекает, что

[17] Ильин В. А. *Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией* // Дифференц. уравнения, 2000, т. 36, №11, с. 1513 - 1528.

это решение имеет след при $x = 0$:

$$u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T], \tag{5}$$

удовлетворяющий условиям согласования с начальными функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и финальными функциями $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, т.е. условиям $\mu(0) = \varphi(0)$, $\varphi(l) = 0$ и $\mu(T) = \varphi_1(0)$, $\varphi_1(l) = 0$, и позволяющий колебательную перевести систему из начального состояния (3) в финальное состояние (4).

Определение 1. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1)–(3) и (5) назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt + \int\limits_0^l [\varphi(x)\Phi_t(x,0) - \psi(x)\Phi(x,0)]dx -$$

$$-\int\limits_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt - \int\limits_0^l\int\limits_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt = 0 \tag{6}$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса[18] $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) \equiv 0$, $\Phi(l,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, граничным условиям (2), (5) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а второму начальному условию (3) – в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$, т.е. почти всюду.

Определение 2. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (1)-(4) назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи (1)–(3) и (5), которое обеспечивает выполненные первого равенства (4) в классическом смысле, а второго равенства (4) – в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$.

Решение изучаемой задачи граничного управления существенно зависит от того, как связаны момент времени T и длина струны l.

Во втором параграфе рассмотрена задача граничного управления (1)–(4) при времени, меньшем или равном критическому. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $T \leqslant 2l$. Тогда для существования единственного решения задачи граничного управления (1)-(4) из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

[18] Определение этого класса аналогично определению класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ и приведено в работе[17].

1) выполнялись условия закрепления $\varphi(l) = 0$, $\varphi_1(l) = 0$;

2) функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ дополнительно удовлетворяли:

a) для случая $0 < T < l$ трем тождествам:

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) - \int\limits_0^T \hat{f}(t+T-\tau,\tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t_2-t) + \varphi(t_2-t) - \int\limits_0^T \hat{f}(t+T-\tau,\tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leqslant t \leqslant l,$$

$$\hat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t-T) + \varphi(t-T) - \int\limits_0^T \hat{f}(t-T+\tau,\tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad T \leqslant t \leqslant l,$$

в которых $t_1 = l - T$, $t_2 = 2l - T$ и через $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначены соответственно первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x, удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(T) - \varphi(T) - \int\limits_0^T \hat{f}(T-\tau,\tau)d\tau = 0,$$

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \hat{\psi}(l-T) + \varphi(l-T) - \int\limits_0^T \hat{f}(l-T+\tau,\tau)d\tau = 0;$$

b) для случая $l \leqslant T < 2l$ тождеству

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t_2-t) + \varphi(t_2-t) - \int\limits_0^T \hat{f}(t+T-\tau,\tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2,$$

в котором символами $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ снова обозначены соответствующие первообразные, удовлетворяющие теперь соотношению

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(t_2) + \varphi(t_2) - \int\limits_0^T \hat{f}(T-\tau,\tau)d\tau = 0.$$

Для случая $T = 2l$ необходимым и достаточным условиям существования единственного решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (1)–(4) является только требование 1).

При этом для вычисления искомого граничного управления $u(0,t) = \mu(t) \in$ $\in W_2^1[0,T]$, *переводящего процесс колебаний из начального состояния (3) в финальное состояние (4), найдено явное аналитическое выражение.*

В третьем параграфе изучена задача граничного управления (1)–(4) в случае, когда момент времени T меняется на полусегменте $(2l, 3l]$. Сформулирована и доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $2l < T \leqslant 3l$. *Тогда решение рассматриваемой задачи граничного управления из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *существует, но определяется неоднозначно. Построен его общий вид, в который входят три совершенно произвольные первообразные функций* $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ *и* $f(x,t)$ *по первой переменной и две произвольные функции, определенные на сегментах длины* $T - 2l$, *принадлежащие на них классу* W_2^1 *и принимающие на концах этих сегментов заданные значения.*

Так как при $T > 2l$ изучаемая задача граничного управления (1)–(4) имеет бесконечно много решений. Поэтому естественно возникает задача об определении оптимального граничного управления, заключающаяся в отыскании среди всех функций $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$ той, которая доставляет минимум интегралу граничной энергии. Этой задаче посвящен четвертый параграф. В нем доказана следующая

Теорема 3. *Пусть* $T = 2ln + \Delta$, *где* $n \in N$ *и* $\triangle \in (0, 2l]$. *Тогда существует единственное граничное управление* $u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T]$, *переводящее систему из начального состояния (3) в финальное состояние (4) и доставляющее минимум интегралу* $\int\limits_0^T |\mu'(t)|^2 dt$. *Это управление построено в явном аналитическом виде, содержащем начальные и финальные функции.*

Во **второй главе** рассматривается вопрос о граничном управлении, производимом смещением для уравнения (1) на конце $x = 0$ при условии, что второй конец свободен, т.е.

$$u_x(l,t) = 0 \text{ для почти всех } t \in [0,T]. \qquad (7)$$

Глава состоит из четырех параграфов. В первом параграфе приведены постановка задачи, необходимые определения и вспомогательные утверждения.

Решение полученной задачи граничного управления (1), (3), (4) и (7) ищется в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. Из того, что $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, следует, что это решение имеет след (5), удовлетворяющий условиям $\mu(0) = \varphi(0)$, $\mu(T) = \varphi_1(0)$ и позволяющий перевести колебательную систему из начального состояния (3) в финальное состояние (4).

Определение 3. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1), (3), (5) и (7) назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству (6) для произвольной функции $\Phi(x,t) \in \widehat{W}_2^2[0,T]$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) = \Phi_x(l,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и условиям $\Phi(x,T) = \Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничному условию (5) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а граничному условию (7) и второму начальному условию (3) почти всюду на $[0,T]$ и на $[0,l]$ соответственно.

Определение 4. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (1), (3), (4) и (7) назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи (1), (3), (5) и (7), которое обеспечивает выполненные первого равенства (4) в классическом смысле, а второго равенства (4) – в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$.

Во втором параграфе сформулирована и доказана следующая

Теорема 4. *Для того чтобы при $T \leqslant 2l$ для наперед заданных пяти функций $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ существовало единственное решение задачи граничного управления (1), (3), (4), (7) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, необходимо и достаточно, чтобы эти функции удовлетворяли:*

а) для случая $0 < T < l$ трем тождествам:

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t_1) - \varphi(t_1) - \int\limits_0^T \hat{f}(t_1 - \tau, \tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant l - T,$$

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) + \hat{\psi}(2l - t_1) - \varphi(2l - t_1) - \int\limits_0^T \hat{f}(t_1 - \tau, \tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad l - T \leqslant t \leqslant l,$$

$$\hat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t_2) + \varphi(t_2) - \int\limits_0^T \hat{f}(t_2 + \tau, \tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad T \leqslant t \leqslant l,$$

здесь и далее символами $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначены соответственно первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x, удовлетворяющие равенствами $\hat{\psi}_1(l) = \hat{\psi}(l) = 0$, и $t_1 = t + T$, $t_2 = t - T$;

b) для случая $l \leqslant T \leqslant 2l$ тождеству

$$\hat{\psi}_1(t)+\varphi_1(t)+\hat{\psi}(2l-t_1)-\varphi(2l-t_1)-\int\limits_0^T \hat{f}(t_1-\tau,\tau)d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2l-T.$$

При $T = 2l$ последнее соотношение рассматривается как равенство в точке

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) + \hat{\psi}(0) - \varphi(0) + \int\limits_0^{2l} \hat{f}(\tau,\tau)d\tau = 0.$$

При выполнении этих условий решение указанной задачи найдено в явном аналитическом виде. Для вычисления соответствующего граничного управления также получено явное выражение.

В третьем параграфе доказана следующая

Теорема 5. *Пусть $2l < T \leqslant 3l$. Тогда для произвольных пяти функций $\varphi(x)$,*
$\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ существует решение $u(x,t)$ задачи граничного управления (1), (3), (4) и (7) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, но оно и соответствующее ему граничное управление определяются неоднозначно. Построен их общий явный аналитический вид.

И, наконец, в последнем параграфе доказана

Теорема 6. *Пусть в задаче граничного управления (1), (3), (4) и (7) $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ и $T = 4ln + \Delta$, где $n \in N$, $\triangle \in [0,4l]$. Тогда существует единственное граничное управление $u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T]$, переводящее систему из начального состояния (3) в финальное состояние (4) и доставляющее минимум интегралу $\int\limits_0^T |\mu'(t)|^2 dt$. Это управление построено в явном аналитическом виде, содержащем начальные и финальные функции.*

В **третьей главе** для уравнения (1) исследуется вопрос о граничном управлении смещениями на двух концах $x = 0$ и $x = l$, т.е.

$$u(0,t) = \mu(t), \;\; u(l,t) = \nu(t) \;\; \text{при } t \in [0,T]. \tag{8}$$

Глава состоит из пяти параграфов. В первом параграфе приведены постановка задачи, необходимые определения и вспомогательные утверждения.

Решение задачи граничного управления (1), (3) и (4) будем искать в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, поэтому искомое решение имеет следы (8), которые принадлежат классу $W_2^1[0,T]$, удовлетворяют условиям согласования $\mu(0) = \varphi(0)$, $\nu(0) = \varphi(l)$, $\mu(T) = \varphi_1(0)$, $\nu(T) = \varphi_1(l)$ и позволяют перевести колебательную систему из начального состояния (3) в финальное состояние (4).

Определение 5. *Обобщенным решением* из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1), (3) и (8) назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt + \int\limits_0^l [\varphi(x)\Phi_t(x,0) - \psi(x)\Phi(x,0)]dx-$$

$$-\int\limits_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt + \int\limits_0^T \nu(t)\Phi_x(l,t)dt - \int\limits_0^l \int\limits_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt = 0$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) \equiv 0$, $\Phi(l,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, граничным условиям (8) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а второму начальному условию (3) – в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$.

Определение 6. *Решением* задачи граничного управления (1), (3) и (4) назовем решение $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1), (3) и (8), которое удовлетворяет финальным условиям (4), понимаемым в смысле равенства элементов классов $W_2^1[0,l]$ и $L_2[0,l]$ соответственно.

Во втором параграфе доказана следующая

Теорема 7. *Для того чтобы при $T < l$ для наперед заданных пяти функций $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ существовало единственное решение задачи граничного управления (1), (3) и (4) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $t \in [0, l-T]$ выполнялись* *следующие два соотношения:*

$$\int_0^t \psi_1(x)dx+\varphi_1(t)-\varphi_1(0)-\int_T^{T+t} \psi(x)dx-\varphi(T+t)+\varphi(T)-\int_0^T \int_{T-\tau}^{t+T-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \equiv 0,$$

$$\int_{t+T}^{l} \psi_1(x)dx+\varphi_1(t+T)-\varphi_1(l)-\int_t^{l-T} \psi(x)dx-\varphi(t)+\varphi(l-T)-\int_0^T \int_{t+\tau}^{l-T+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \equiv 0.$$

При этом искомые граничные управления $u(0,t)=\mu(t)$ и $u(l,t)=\nu(t)$, переводящие процесс колебаний из начального состояния (3) в финальное состояние (4), построены в явном аналитическом виде, содержащем начальные и финальные функции.

В третьем параграфе доказывается следующая

Теорема 8. *Для того чтобы при $T=l$ для наперед заданных пяти функций $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ существовало единственное решение задачи граничного управления (1), (3) и (4) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

$$\hat{\psi}_1(0)+\varphi_1(0)-\hat{\psi}(l)-\varphi(l)-\int_0^l \hat{f}(l-\tau,\tau)d\tau = 0,$$

$$\hat{\psi}_1(l)-\varphi_1(l)-\hat{\psi}(0)+\varphi(0)-\int_0^l \hat{f}(\tau,\tau)d\tau = 0,$$

где $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначают первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x соответственно.

При выполнении этих условий искомое решение и соответствующие граничные управления строятся в явном аналитическом виде.

В четвертом параграфе установлен следующий результат.

Теорема 9. *Если $l < T \leqslant 2l$, то для произвольных пяти функций $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ решение $u(x,t)$ задачи граничного управления (1), (3) и (4) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ существует, но определяется неоднозначно. Приведен его общий вид, в который входят три* *совершенно произвольные первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по первой переменной и две произвольные функции, определенные на сегментах длины $T-l$, принадлежащие на них классу W_2^1 и принимающие на концах этих сегментов заданные значения.*

Пятый параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 10. *Пусть в задаче граничного управления (1), (3) и (4) $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Тогда при $T = 2ln + \Delta$, где $n \in N$ и $\triangle \in (0, 2l]$, существуют единственные граничные управления $u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $u(l,t) = \nu(t) \in W_2^1[0,T]$, переводящие колебательную систему из начального состояния (3) в финальное состояние (4) и доставляющие минимум интегралу граничной энергии. Эти управления построены в явном аналитическом виде.*

В **четвертой главе** для уравнения Клейна–Гордона–Фока с переменным коэффициентом вида

$$\mathcal{L}u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = 0,\ 0 < x < l,\ 0 < t < T \qquad (9)$$

изучается вопрос граничного управления, производимого смещением на одном конце при закрепленном втором. Иными словами, процесс, описываемый уравнением (9), управляется с помощью граничной функции (5) при условии, что на другой границе задано условие (2). Глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе приводятся постановка задачи и необходимые определения.

Как и в предыдущих главах, предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость заданы равенствами (3), а в момент времени $t = T$ – равенствами (4). Везде предполагается, что в (3) и (4) $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$, а в (9) $q(x,t)$ – ограниченная и измеримая функция.

Решение полученной задачи граничного управления (9), (2), (3) и (4) будем искать в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. Отметим, что из принадлежности решения изучаемой задачи граничного управления классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ следует, что оно имеет след (5), который удовлетворяет условиям согласования с функциями $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, т.е. $\mu(0) = \varphi(0)$, $\varphi(l) = 0$ и $\mu(T) = \varphi_1(0)$, $\varphi_1(l) = 0$.

Определение 7. *Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи* (9), (2), (3) и (5) назовем такую функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)\mathcal{L}\Phi(x,t)\,dxdt + \int_0^l [\varphi(x)\Phi_t(x,0) - \psi(x)\Phi(x,0)]\,dx -$$

$$- \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt = 0 \qquad (10)$$

для любой функции $\Phi(x,t) \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) = \Phi(l,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и условиям $\Phi(x,T) = \Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничным условиям (2), (5) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а второму начальному условию (3) – почти всюду на $[0,l]$.

Определение 8. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *задачи граничного управления* (9), (2), (3) и (4) назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи (9), (2), (3) и (5) с такой функцией $\mu(t)$, что выполнены первое финальное условие (4) в классическом смысле, а второе условие (4) почти всюду на $[0,l]$.

Во втором параграфе рассматривается смешанная задача (9), (2), (3) и (5) в случае, когда $\varphi(x) \equiv 0$ для любого $x \in [0,l]$, $\psi(x) = 0$ для почти всех $x \in [0,l]$, $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию согласования $\mu(0) = 0$, и $T \leqslant 2l$. Главным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 11. *Пусть $T \leqslant 2l$. Тогда решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (9), (2), (3) и (5), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in [0,l]$, $\psi(x) = 0$ для почти всех $x \in [0,l]$ и $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$, для которой $\mu(0) = 0$, существует и единственно, причем $u(x,t) \equiv 0$ в области $\{(x,t) \mid 0 \leqslant t \leqslant l, t \leqslant x \leqslant l\}$.*

В третьем параграфе исследуется задача граничного управления (9), (2), (3) и (4) в случае, когда $T \leqslant 2l$. Доказаны следующие

Теорема 12. *Для любого $T \in (0,2l]$ задача граничного управления (9), (2), (3) и (4) может иметь лишь одно решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.*

Теорема 13. *Пусть $T = 2l$. Тогда решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_{2l})$ задачи граничного управления (9), (2), (3) и (4) существует и единственно тогда и только тогда, когда:*

1) $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$,

2) *выполнены условия согласования* $\varphi(l) = 0$, $\varphi_1(l) = 0$.

Из хода доказательства теоремы 13 вытекают два следствия.

Следствие 1. Решение изучаемой задачи граничного управления в точке $x = 0$ удовлетворяет оценке

$$\|\mu - \overset{0}{\mu}\|_{W_2^1[0,2l]} \leqslant C\|q\|_\infty,$$

где $\overset{0}{\mu}(t) = \overset{0}{u}(0,t)$ – граничное управление процессом, описываемым соответствующим однородным волновым уравнением, а постоянная C не зависит от нормы функции $q(x,t)$.

Это свидетельствует о регулярности решения рассматриваемой задачи граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x,t)$ однородного волнового оператора с ограниченным и измеримым коэффициентом $q(x,t)$.

Следствие 2. Имеет место следующая априорная оценка:

$$\|u(x,t)\|_{W_2^1(Q_{2l})} \leqslant C' \left(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\right), \qquad (11)$$

где $C' = C'(\|q\|_\infty)$.

Оценка (11) показывает, что полученное решение задачи граничного управления является устойчивым относительно начальных и финальных условий.

В **пятой главе** рассмотрена задача граничного управления смещением процесса, описываемого уравнением (9), на одном конце при свободном втором. То есть изучаемый процесс управляется граничной функцией (5) при условии, что на втором конце задано условие (7). Глава содержит три параграфа. В первом параграфе приводятся постановка задачи и необходимые определения.

Решение полученной задачи граничного управления (9), (3), (4) и (7) ищется в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, из которого следует, что оно имеет след (5), удовлетворяющий условиям согласования $\mu(0) = \varphi(0)$ и $\mu(T) = \varphi_1(0)$.

Определение 9. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* (9), (3), (5) и (7) назовем такую функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству (10) для любой пробной функции $\Phi(x,t) \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) = \Phi_x(l,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и условиям $\Phi(x,T) = \Phi_t(x,T) \equiv 0$

при $0 \leqslant x \leqslant l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничному условию (5) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а граничному условию (7) и второму начальному условию (3) почти всюду на $[0, T]$ и на $[0, l]$ соответственно.

Определение 10. *Решением из класса* $\widehat{W_2^1}(Q_T)$ *задачи граничного управления* (9), (3), (4) и (7) назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи (9), (3), (5) и (7) с такой функцией $\mu(t)$, что выполнены первое финальное условие (4) в классическом смысле, а второе финальное условие (4) почти всюду на $[0, l]$.

Во втором параграфе доказана

Теорема 14. *Пусть $T \leqslant 2l$. Тогда решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W_2^1}(Q_T)$ смешанной задачи (9), (3), (5) и (7), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in [0, l]$, $\psi(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, l]$ и $\mu(t)$ - произвольная функция из класса $W_2^1[0, T]$, для которой $\mu(0) = 0$, существует и единственно, причем $u(x,t) \equiv 0$ в области $\{(x,t) \mid 0 \leqslant t \leqslant l, t \leqslant x \leqslant l\} \bigcap Q_T$.*

В третьем параграфе доказаны следующие

Теорема 15. *Для любого $T \in (0, 2l]$ задача граничного управления (9), (3), (4) и (7) может иметь лишь одно решение из класса $\widehat{W_2^1}(Q_T)$.*

Теорема 16. *Пусть $T = 2l$. Тогда для существования единственного решения из класса $\widehat{W_2^1}(Q_{2l})$ задачи граничного управления (9), (3), (4) и (7) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0, l]$,

2) начальные и финальные функции удовлетворяют соотношению

$$A_0 + \int\limits_0^l \int\limits_\tau^{2l-\tau} \widetilde{q}_A^*(\xi,\tau) A(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = B_0 + \int\limits_l^{2l} \int\limits_{2l-\tau}^{\tau} \widetilde{q}_B^*(\xi,\tau) B(\xi,\tau)\, d\xi d\tau,$$

где A_0, B_0 – константы из равенства

$$A_0 \equiv \varphi(0) + \int\limits_0^l \psi(\xi)\, d\xi = \varphi_1(0) - \int\limits_0^l \psi_1(\xi)\, d\xi \equiv B_0,$$

величины $A(\xi,\tau)$, $B(\xi,\tau)$ вычисляются через начальные и финальные условия *по формулам*

$$A(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\left[\varphi(l-|\xi+\tau-l|)+\varphi(l-|\xi-\tau-l|)+\int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\psi(l-|\zeta-l|)\,d\zeta\right],$$

$$B(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(l-|\xi+\tau-3l|)+\varphi_1(l-|\xi-\tau+l|)-\int\limits_{\xi+\tau-2l}^{\xi-\tau+2l}\psi_1(l-|\zeta-l|)\,d\zeta\right],$$

а ядра интегральных операторов $\widetilde{q}_A^*(\xi,\tau)$ *и* $\widetilde{q}_B^*(\xi,\tau)$ *связаны с коэффициентом* $q(\xi,\tau)$ *в (9) соотношениями*

$$\widetilde{q}_A^*(\xi,\tau)=q(l-|\xi-l|,\tau)\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{q}_A^{(k)}(l,l;\xi,\tau),\qquad \widetilde{q}_A^{(0)}(x,t;\xi,\tau)\equiv 1/2;$$

$$\widetilde{q}_A^{(k+1)}(x,t;\xi,\tau)=\tfrac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\max(x-t+\tau_1,\xi+\tau-\tau_1)}^{\min(x+t-\tau_1,\xi-\tau+\tau_1)}q(l-|\xi_1-l|,\tau_1)\widetilde{q}_A^{(k)}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)\,d\xi_1 d\tau_1,$$

$$\widetilde{q}_B^*(\xi,\tau)=q(l-|\xi-l|,\tau)\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{q}_B^{(k)}(l,l;\xi,\tau),\qquad \widetilde{q}_B^{(0)}(x,t;\xi,\tau)\equiv 1/2;$$

$$\widetilde{q}_B^{(k+1)}(x,t;\xi,\tau)=\tfrac{1}{2}\int\limits_{t}^{\tau}\int\limits_{\max(x+t-\tau_1,\xi-\tau+\tau_1)}^{\min(x-t+\tau_1,\xi+\tau-\tau_1)}q(l-|\xi_1-l|,\tau_1)\widetilde{q}_B^{(k)}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)\,d\xi_1 d\tau_1.$$

Из процесса доказательства этой теоремы вытекают следующие факты.

Следствие 3. Справедлива априорная оценка вида (11) для решения изучаемой задачи граничного управления, которая свидетельствует об устойчивости полученного решения относительно начальных и финальных условий.

Следствие 4. Если $\|q\|_\infty\to 0$, то $\|u-\overset{0}{u}\|_{W_2^1(Q_{2l})}\to 0$ и, соответственно, $\|\mu-\overset{0}{\mu}\|_{W_2^1[0,2l]}\to 0$, где $\overset{0}{\mu}(t)=\overset{0}{u}(0,t)$ – граничное управление процессом, описываемым соответствующим однородным волновым уравнением. Это свидетельствует о регулярности решения рассматриваемой задачи граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x,t)$ волнового оператора в (9) с ограниченным и измеримым коэффициентом $q(x,t)$.

И, наконец, в **шестой главе** рассматривается задача граничного управления смещениями для уравнения Клейна–Гордона–Фока на двух концах. Точнее, процесс, описываемый уравнением (9), управляется с помощью двух граничных функций (8). В главу входят три параграфа. В первом параграфе приведены постановка задачи и необходимые определения.

Решение задачи граничного управления (9), (3) и (4) будем искать в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, из которого следует, что функция $u(x,t)$ имеет следы $u(0,t)=\mu(t)\in W_2^1[0,T]$ и $u(l,t)=\nu(t)\in W_2^1[0,T]$, которые удовлетворяют условиям согласования с функциями $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, т.е. $\mu(0)=\varphi(0)$, $\nu(0)=\varphi(l)$, $\mu(T)=\varphi_1(0)$, $\nu(T)=\varphi_1(l)$.

Определение 11. *Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи* (9), (3) и (8) назовем такую функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u(x,t)\mathcal{L}\Phi(x,t)\,dxdt+\int\limits_0^l[\varphi(x)\Phi_t(x,0)-\psi(x)\Phi(x,0)]\,dx-$$

$$-\int\limits_0^T[\mu(t)\Phi_x(0,t)-\nu(t)\Phi_x(l,t)]\;dt=0$$

для любой функции $\Phi(x,t)\in\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t)=\Phi(l,t)\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$ и условиям $\Phi(x,T)=\Phi_t(x,T)\equiv 0$ при $0\leqslant x\leqslant l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничным условиям (8) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а второму начальному условию (3) – почти всюду на $[0,l]$.

Определение 12. *Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления* (9), (3) и (4) назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи (9), (3), (8) с такими функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, что выполнены первое финальное условие (4) в классическом смысле, второе условие (4) почти всюду на $[0,l]$.

Во втором параграфе изучается разрешимость смешанной задачи (9), (3) и (8). Доказана следующая

Теорема 17. *Пусть $T\leqslant l$. Тогда решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (9), (3) и (8), в которой $\varphi(x)\equiv 0$ при $x\in[0,l]$, $\psi(x)=0$ для почти всех $x\in[0,l]$ и $\mu(t)$, $\nu(t)$ – произвольные функции из класса $W_2^1[0,T]$, для которых $\mu(0)=0$, $\nu(0)=0$, существует и единственно, причем $u(x,t)\equiv 0$ в области $\{(x,t)\mid 0\leqslant t\leqslant l/2,\ t\leqslant x\leqslant l-t\}\bigcap Q_T$.*

Третий параграф последней главы посвящен исследованию задачи граничного управления (9), (3) и (4) в случае, когда момент времени принимает значение из полусегмента $(0,l]$. Доказаны следующие

Теорема 18. *Для любого $T \in (0,l]$ задача граничного управления (9), (3) и (4) может иметь лишь одно решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.*

Теорема 19. *Пусть $T = l$. Тогда для существования единственного решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (9), (3) и (4) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$,

2) начальные и финальные функции удовлетворяют соотношению

$$A_0 + \int\limits_0^{l/2}\int\limits_\tau^{l-\tau} q_A^*(\xi,\tau)A(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = B_0 + \int\limits_{l/2}^{l}\int\limits_{l-\tau}^{\tau} q_B^*(\xi,\tau)B(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

где A_0, B_0 – константы из равенства

$$A_0 \equiv \varphi(0) + \varphi(l) + \int\limits_0^l \psi(\xi)\,d\xi = \varphi_1(0) + \varphi_1(l) - \int\limits_0^l \psi_1(\xi)\,d\xi \equiv B_0,$$

величины $A(\xi,\tau)$, $B(\xi,\tau)$ вычисляются через начальные и финальные условия по формулам

$$A(\xi,\tau) = \varphi(\xi+\tau) + \varphi(\xi-\tau) + \int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \psi(\zeta)\,d\zeta,$$

$$B(\xi,\tau) = \varphi_1(\xi+\tau-l) + \varphi_1(\xi-\tau+l) - \int\limits_{\xi+\tau-l}^{\xi-\tau+l} \psi_1(\zeta)\,d\zeta,$$

а ядра интегральных операторов $q_A^*(\xi,\tau)$ и $q_B^*(\xi,\tau)$ связаны с коэффициентом $q(\xi,\tau)$ в (9) соотношениями

$$q_A^*(\xi,\tau) = q(\xi,\tau)\sum_{k=0}^{\infty} q_A^{(k)}(l/2,l/2;\xi,\tau), \qquad q_A^{(0)}(x,t;\xi,\tau) \equiv 1/2;$$

$$q_A^{(k+1)}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_\tau^t \int\limits_{\max(x-t+\tau_1,\xi+\tau-\tau_1)}^{\min(x+t-\tau_1,\xi-\tau+\tau_1)} q(\xi_1,\tau_1)q_A^{(k)}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)\,d\xi_1 d\tau_1,$$

$$q_B^*(\xi,\tau) = q(\xi,\tau)\sum_{k=0}^{\infty} q_B^{(k)}(l/2,l/2;\xi,\tau), \qquad q_B^{(0)}(x,t;\xi,\tau) \equiv 1/2;$$

$$q_B^{(k+1)}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_t^\tau \int\limits_{\max(x+t-\tau_1,\xi-\tau+\tau_1)}^{\min(x-t+\tau_1,\xi+\tau-\tau_1)} q(\xi_1,\tau_1)q_B^{(k)}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)\,d\xi_1 d\tau_1.$$

Следствие 5. Из доказательства теоремы 18 вытекает априорная оценка вида (11) решения изучаемой задачи граничного управления, которая свидетельствует об устойчивости полученного решения относительно начальных и финальных условий.

Следствие 6. Если $\|q\|_\infty \to 0$, то $\|u - \overset{0}{u}\|_{W_2^1(Q_l)} \to 0$ и, соответственно, $\|\mu - \overset{0}{\mu}\|_{W_2^1[0,l]} \to 0$, $\|\nu - \overset{0}{\nu}\|_{W_2^1[0,l]} \to 0$, где $\overset{0}{\mu}(t) = \overset{0}{u}(0,t)$ и $\overset{0}{\nu}(t) = \overset{0}{u}(l,t)$ – граничные управления процессом, описываемым соответствующим однородным волновым оператором. Это свидетельствует о регулярности решения рассматриваемой задачи граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x,t)$ волнового оператора в (9) с ограниченным и измеримым коэффициентом $q(x,t)$.

Благодарности:

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту Л. В. Крицкову за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку при выполнении работы.

Также мы выражаем свою искреннюю благодарность академику РАН В. А. Ильину за обсуждение результатов диссертации и ощутимую поддержку на всех этапах ее подготовки.

Публикации автора по теме диссертации

1. Абдукаримов М. Ф. *Об успокоении и возбуждении колебательного процесса, описываемого неоднородным волновым уравнением, за большие времена* // Докл. АН РТ, 2011, т.54, №8, с. 624–630.

2. Абдукаримов М. Ф. *Граничное управление процессом колебаний, описываемым неоднородным волновым уравнением* // Изв. АН РТ, 2011, №3(144), с. 33–40.

3. Абдукаримов М. Ф. *Граничное управление процессом колебаний, описываемым неоднородным волновым уравнением, за минимальный промежуток времени* // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ, 2011, №8, с. 5–18.

4. Abdukarimov M. F. *On a boundary control problem for forced string oscillations* // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2012, vol.2, №2, p. 105–116.

5. Абдукаримов М. Ф. *О граничном управлении на двух концах вынужденными колебаниями струны* // Докл. АН РТ, 2012, т.55, №4, с. 291–299.

6. Абдукаримов М. Ф. *Граничное управление смещениями на двух концах процесса вынужденных колебаний струны* // Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2012», секция «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА», М.: МГУ имени М.В.Ломоносова, 9-13 апреля, 2012 г., с. 71–72.

7. Абдукаримов М. Ф., Крицков Л. В. *Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце при закрепленном втором* // Дифференц. уравнения, 2013, т. 49, №6, с. 759–771.

8. Абдукаримов М. Ф., Крицков Л. В. *Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещениями на двух концах* // Дифференц. уравнения, 2013, т. 49, №8, с. 1036–1046.

9. Абдукаримов М. Ф., Крицков Л. В. *О граничном управлении процессом, описываемым уравнением Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом* // Материалы Воронежской зимней математической школы, 2013, с. 6.

10. Крицков Л. В., Абдукаримов М. Ф. *Граничное управление на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом* // Докл. РАН, 2013, т. 450, №6, с. 640–643.

11. Абдукаримов М. Ф. *Граничное управление вынужденными колебаниями на одном конце струны и его приложения* // Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2013», секция «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА», М.: МГУ имени М.В.Ломоносова, 9-12 апреля, 2013 г., с. 123–124.

12. Абдукаримов М. Ф. *О граничном управлении смещением на одном конце при закрепленном втором процесса вынужденных колебаний струны* // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ, 2013, №10, с. 7–33.

13. Kritskov L. V., Abdukarimov M. F. *Boundary control by the displacement for the telegraph equation with a variable coefficient and the Neumann boundary condition* // Caspian Journal of Applied Mathematics, Economics and Ecology, 2013, v.1, №1, pp. 51–69.