Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Гуляев Денис Анатольевич

# О задаче с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | академик РАН, профессор<br>кафедры функционального анализа и его<br>применений факультета ВМК МГУ им М.В.Ломоносова<br>**Моисеев Евгений Иванович** |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор<br>кафедры высшей математики<br>Московского государственного университета<br>приборостроения и информатики<br>**Макин Александр Сергеевич** |
| | доктор физико-математических наук, профессор<br>кафедры прикладной математики и информатики<br>Самарского государственного<br>технического университета<br>**Репин Олег Александрович** |
| Ведущая организация: | Федеральное государственное<br>бюджетное образовательное учреждение<br>высшего профессионального образования<br>"Орловский государственный университет" |

Защита состоится "20"ноября 2013 года в 15 часов 30 минут на заседнии диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан "17"октября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, профессор доктор физико-математических наук Е.В. ЗАХАРОВ

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Задачи со спектральным параметром в граничных условиях возникают в ряде математических моделей для уравнений параболического, гиперболического и смешанного типов. Еще М. Пуассон в своих мемуарах решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к концу упругой нити. А. Кнезер в работе изучал колебания однородной струны, в некоторых точках которой сосредоточены массы. А.Н. Крылов и С.П. Тимошенко указывали на актуальность задачи о продольных колебаниях стержня в связи с теорией индикатора паровой машины и прочих измерительных приборов. К этой задаче сводится изучение крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода "дрожащих" клапанов и крутильных колебаний шкива с подвешенной на конце массой. Задача подобного плана приобрела особую актуальность еще и в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Аналогичные математические модели возникают в задачах об изучении электромагнитных колебаний в системах с сосредоточенными емкостями, самоиндукциями и задачах о распространении тепла в средах, граничащих с сосредоточенными теплоемкостями, которые рассматривались А.А. Самарским, А.А. Виттом и С.П. Шубиным . Недавно интерес к задачам со спектральным параметром в граничном условии возник в связи с теорией осреднения.

В основе спектрального метода решения ряда задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа лежат за-

дачи со спектральным параметром в граничных условиях. Начало развитию спектральной теории краевых задач для уравнений смешанного типа положили в конце семидесятых - начале восьмидесятых годов двадцатого века работы Е.И. Моисеева , С.М. Пономарева, Т.Ш. Кальменова. Им предшествовали глубокие исследования Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, М.А. Лаврентьева, Ф.И. Франкля,
И.Н. Векуа, А.В. Бицадзе, Л.В. Овсянникова и других математиков по вопросам классической разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа, причем, как правило, задача сводилась к сингулярному интегральному уравнению на линии изменения типа. В этих работах указывалось на актуальность проводимых исследований по теории эллиптико-гиперболических уравнений, а позднее в работах Я.С. Уфлянда, А.Г. Шашкова, А.М. Нахушева, Х. Азиза и Э. Сеттари было обращено внимание на математические модели, приводящие к параболо-гиперболическим уравнениям.

Задачи со спектральным параметром в граничных условиях, как правило, несамосопряженные. Большой вклад в науку был внесен академиком В.А.Ильиным, получившим фундаментальные результаты по спектральной теории для несамосопряженных дифференциальных операторов. В опубликованной в 1983 г. работе А.А. Шкаликова построена общая теория спектральных задач с параметром в граничных условиях. Им доказаны теоремы кратной базисности, разложения и полноты для выделенных классов краевых задач: для обыкновенных дифференциальных уравнений: регулярных, почти регулярных и нормальных. А.М. Ахтямовым в цикле работ предложены алгоритмы решения задач со сложным вхождением спектрального параметра в граничные условия, выписаны соответствующие формулы диагностики механических систем и строительных конструкций.

Общий подход спектральным методом к изучению краевых задач для уравнений эллиптико-гиперболического типа предложен в работах академика Е.И. Моисеева. Им для обоснования представления решений в виде биортогональных рядов установлены тонкие результаты об условиях базисности систем синусов и косинусов.

В работах Е.И. Моисеева и Н.Ю. Капустина изучены вопросы полноты, минимальности и базисности в пространстве $L_p, p > 1$ систем корневых функций классических задач со спектральным параметром в граничных условиях, возникающих в теории параболо-гиперболических уравнений, а также получены условия, обеспечивающие сходимость разложений в классе непрерывных функций. В цикле работ Н.Ю. Капустина спектральным методом рассмотрены вопросы о максимальной гладкости обобщенного решения задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с начальной функцией из класса суммируемых функций, о корректности постановки смешанной задачи со смешанной производной в граничном условии для оператора теплопроводности, возникающей при описании процесса теплопереноса параболо-гиперболическим уравнением. Изучены: полнота, минимальность и базисность систем корневых функций в задачах с комплекснозначным физическим параметром и квадратичным вхождением спектрального параметра в граничное условие.

В работах З.С. Алиева, Н.Б. Керимова, З.С. Алиева, Н.Б. Керимова и В.С. Мирзоева рассмотрены вопросы базисности в пространстве $L_p, p > 1$ систем собственных функций ряда краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядка с линейным вхождением спектрального параметра в граничные условия. Доказаны осцилляционные теоремы и получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. В некоторых случаях используются свойства пространств с индефинитной метрикой. Классические результаты по этим вопросам содержатся в работах А.Ф. Никифорова и В.Б. Уварова, Т.Я. Азизова и И.С. Иохвидова.

В связи с рассматриваемыми в диссертации вопросами отметим работы И.Ш. Ахатова и А.М. Ахтямова, Ж. Бен Амары, Ж. Бен Амары и А.А. Шкаликова, Б.Т. Билалова, В.Д. Будаева, В.В. Власова, Г.Г. Девдариани, Т.Д. Джураева, В.П. Диденко, В.А. Елеева, В.И. Жегалова, А.Н. Зарубина, Н.Ю. Капустина и Т.Е. Моисеева, А.Г. Костюченко, А.А. Шкаликова, А.Г. Кузьмина, В.М. Курбанова, В.Б. Лидского, Ж.Л. Лионса, И.С. Ломова, А.С. Макина, Д.Б. Марченкова, С.В. Мелешко, В.А. Нахушевой, З.А. Нахушевой, А.А. Полосина, А.В. Псху, С.П. Пулькина, Л.С. Пулькиной, О.А. Репина, О.А. Репина и С.В. Ефимовой, Е.М. Русаковского, К.Б. Сабитова, К.Б. Сабитова и Н.В. Мартемьяновой, К.Б. Сабитова и Л.Х. Рахмановой, К.Б. Сабитова и Э.М. Сафина, В.А. Садовничего, М.С. Салахитдинова, М.М. Смирнова, А.П. Солдатова, Е.А. Уткиной, С. Фултона, М.М. Хачева, А.А. Шкаликова, М. Розо, Ж. Уолтера.

**Цель работы.** 1) Изучение полноты, минимальности и базисности в пространстве $L_p, p > 1$ системы собственных функций задачи с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр и коэффициент в этом условии, вообще говоря, комплекснозначный; 2) формулировка условий, обеспечивающих сходимость соответствующих спектральных разложений в классе $W_2^m$; 3) изучение вопроса о равномерной сходимости на отрезке спектральных разложений по выделенному базису пространства $L_2$ и по всей системе собственных функций; 4) решение спектральным методом краевых задач для параболического и параболо-гиперболического уравнения, приводящих методом разделения переменных к рассматриваемой спектральной задаче.

**Методы исследования.** Для изучения вопросов базисности в пространстве $L_p, p > 1$ вводится вполне непрерывный оператор на основе выделенной минимальной подсистемы с предварительным построением биортогонально сопряженной системы и выводом асимптотических формул для собственных значений и собственных функций. Сходимость спектральных разложений в классе непрерывных функций, установленная на основе асимптотических формул для функций биортогонально сопряженной системы и с учетом граничных условий нелокального характера.

**Научная новизна.** Получены новые результаты по вопросам полноты, минимальности и базисности в пространстве $L_p, p > 1$ системы собственных функций задачи с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр и коэффициент в этом условии комплексный. Сформулированы условия, обеспечивающие сходимость соответствующих спектральных разложений в классе $W_2^m$. Изучен вопрос о равномерной сходимости на отрезке спектральных разложений по выделенному базису пространства $L_2$ и по всей системе собственных функций. В виде билинейных рядов выписаны решения актуальных краевых задач для параболического и параболо-гиперболического уравнений с граничным условием третьего рода на нехарактеристической линии границы области.

**Практическая и теоретическая значимость результатов.** Полученные в диссертации результаты и подходы к исследованиям могут быть использованы при дальнейшем изучении краевых задач для параболического и параболо-гиперболического уравнений. Возможно широкое применение этих результатов при математическом моделировании процессов колебаний нагруженных тел, газодинамических процессов, различных физических явлений в теории теплообмена и массообмена в капиллярнопористых средах.

**Апробация работы.** По материалам диссертации были сделаны доклады на семинарах и конференциях: научно-исследовательский семинар кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ под руководством академика Е.И.Моисеева, конференция МГУ "Ломоносовские чтения"(2012, Москва), 38-я международная конференция "Приложение математики в инженерных науках и экономике"(2012, Болгария).

**Публикации.** Основное содержание и результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах, две из которых в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК РФ. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы включающего 194 наименования. Объем работы 78 страниц.

## Содержание работы

Во введении дается обзор литературы, кратко излагается содержание работы.

**В параграфе 1 главы 1** рассматривается следующая спектральная задача

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$X'(0) = bX(0), \quad X'(1) = d\lambda X(1) \tag{2}$$

с постоянными коэффициентами $b \neq 0$ и $d > 0$.

Спектральная задача (1)-(2) не имеет нулевого собственного значения, поэтому общее решение уравнения (1) в случае $\lambda \neq 0$, удовлетворяющее первому граничному условию, можно записать в виде:

$$X(x) = \frac{b \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Записав для этой функции второе граничное условие, получим характеристическое уравнение задачи (1)-(2)

$$(1+bd)\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = (b-d\lambda)\cos\sqrt{\lambda}. \tag{3}$$

Если $bd = -1$, то уравнение (3) имеет один отрицательный корень $\lambda = -1/d$ и бесконечное множество положительных корней $\lambda = [\pi/2 + \pi(n-1)]^2$, $n = 1, 2, 3, ...$ В случае $bd > -1$, $b > 0$, все корни уравнения (3) – положительные. При значениях параметров $bd < -1$ или $bd > -1$, $b < 0$ также имеется одно отрицательное собственное значение, а все остальные собственные числа расположены в положительной части действительной оси.

Присвоим нулевой индекс любому собственному значению, а все остальные занумеруем в порядке возрастания. Собственные функции задачи (1)-(2) определяются по формуле:

$$X_n(x) = \sqrt{2}\left[\frac{b\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}} + \cos\sqrt{\lambda_n}x\right], \quad n = 0, 1, 2, ...$$

(в случае $\lambda_n < 0$ синус и косинус гиперболические). Функции биортонормированной системы $\{\Psi_m(x)\}, m = 1, 2, 3...$, к системе $\{X_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$, имеют вид:

$$\Psi_m(x) = \frac{\left[X_m(x) - \frac{X_m(1)}{X_0(1)}X_0(x)\right]}{\left[\int_0^1 X_m^2(x)dx + dX_m^2(1)\right]}. \tag{4}$$

Наряду с задачей (1)-(2) рассматривается спектральная задача

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$bY'(0) = -\lambda Y(0), \quad Y(1) = -dY'(1) \tag{6}$$

для системы $\{Y_n(x)\}, n = 0, 1, 2, ...$, функции которой вычисляются по формуле

$$Y_n(x) = \frac{X'_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Функции биортонормированной системы $\{\varphi_m(x)\}, m = 1, 2, 3, ...$, к системе $\{Y_n(x), n = 1, 2, 3, ...\}$, имеют вид

$$\varphi_m(x) = \left[Y_m(x) - \frac{Y_m(0)}{Y_0(0)} Y_0(x)\right] / \left[\int_0^1 Y_m^2(x)dx + \frac{1}{b} Y_m^2(0)\right].$$

Системы $\{X_n(x)\}$ и $\{Y_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$, образуют базис в пространстве $L_p(0, 1), p > 1$, а в случае $p = 2$ даже базис Рисса. В настоящем параграфе доказано общее утверждение для спектральной задачи (1)-(2) в предположении, что параметр d - любое комплексное число, отличное от нуля, $-\frac{\pi}{2} < \arg \sqrt{\lambda_n} \leq \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, 3, ...$, $\lambda_0$ - по-прежнему, любое собственное значение, а все остальные занумерованы в порядке возрастания их абсолютных величин.

**Теорема 1.** *Если*

$$d \notin \{\frac{b \cos z - z \sin z}{bz \sin z + z^2 \cos z}\},$$

*где* $\{z\}$ *- множество комплексных корней уравнения*

$$\frac{(b^2 - z^2) \sin z \cos z}{z} + b^2 + z^2 + 2b \cos^2 z = 0, \qquad (7)$$

*то система* $\{X_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$, *собственных функций задачи (1)-(2) является базисом в пространстве* $L_p(0, 1), p > 1$, *(базисом Рисса* $p = 2$*).*

**Замечание.** *Уравнение (7) при некоторых значениях параметра* $b$, *например при* $b = -1/2$, *имеет решение и на действительной оси.*

Можно поставить нелокальную спектральную задачу, описывающую систему $\{X_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$, собственных функций локальной задачи (1) - (2). А, именно, следующую спектральную задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < 1,$$

$$X'(0) = bX(0),$$

$$X(1) + \frac{1}{d(b\sin\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0})}\times$$

$$\times\int_0^1 (b\sin\sqrt{\lambda_0}x + \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0}x)X(x)dx = 0,$$

$$(1 + bd)\sqrt{\lambda_0}\sin\sqrt{\lambda_0} = (b - d\lambda_0)\cos\sqrt{\lambda_0}.$$

В данной задаче граничное условие не содержит спектрального параметра.

**В параграфе 2 главы 1** получены условия, обеспечивающие сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f(t)\Psi_n(t)dt\right)X_n(x) \tag{8}$$

в классах $W_2^m(0, 1)$, где система $\{X_n(x)\}, n = 1, 2, 3, ...$, является подсистемой системы собственных функций задачи (1) - (2) без любой удаленной собственной функции, которой присвоен нулевой индекс, а собственные значения занумерованы в порядке возрастания. Соответственно функции $\Psi_n(x), n = 1, 2, 3, ...$, являются элементами биортогонально сопряженной системы.

**Теорема 2.** *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

$$f(x) \in W_2^{2n}(0, 1),$$

$$J \equiv f(1) + \frac{\int_0^1 (b\sin\sqrt{\lambda_0}t + \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0}t) f(t)dt}{d(b\sin\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0})} = 0,$$

$$f'(0) = bf(0), ..., f^{(2n-1)}(0) = bf^{(2n-2)}(0), n \geqslant 1,$$

$$f'(1) + df''(1) = 0, ..., f^{(2n-3)}(1) + df^{(2n-2)}(1) = 0, n \geqslant 2.$$

*Тогда ряд (8) сходится в метрике* $W_2^{2n}(0,1)$.

*Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям:*

$$f(x) \in W_2^{2n-1}(0,1),$$

$$J = 0, n \geqslant 1,$$

$$f'(0) = bf(0), ..., f^{(2n-3)}(0) = bf^{(2n-4)}(0),$$

$$f'(1) + df''(1) = 0, ..., f^{(2n-3)}(1) + df^{(2n-2)}(1) = 0,$$

$$J = 0, n \geqslant 2.$$

*Тогда ряд (8) сходится в метрике* $W_2^{2n-1}(0,1)$.

**В параграфе 1 главы 2** рассмотрен вопрос о равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$ разложений по собственным функциям спектральной задачи (1) - (2). Справедлива следующая

**Теорема 3.** *Пусть* $f(x) \in C[0,1]$. *Ряд Фурье (8) сходится равномерно на отрезке* $[0,1]$ *тогда и только тогда, когда сходится равномерно ряд Фурье для функции*

$$f(x) + \frac{\int_0^1 (b\sin\sqrt{\lambda_0}t + \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0}t) f(t)dt}{d(b\sin\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_0})}$$

*по ортонормированному базису* $\{\sqrt{2}\cos\mu_n x\}, n = 1, 2, 3, ...,$ *где* $\mu_n = \frac{\pi}{2} + \pi(n-1)$.

**Следствие.** *Пусть $f(x)$ - функция из класса Гельдера $C^{\alpha}[0,1]$ с любым положительным показателем $\alpha$ и выполнено условие*

$$f(1)+\frac{\int_0^1(b\sin\sqrt{\lambda}_0 t+\sqrt{\lambda}_0\cos\sqrt{\lambda}_0 t)f(t)dt}{d(b\sin\sqrt{\lambda}_0+\sqrt{\lambda}_0\cos\sqrt{\lambda}_0)}=0.$$

*Тогда ряд Фурье (8) сходится равномерно на отрезке $[0,1]$.*

**В параграфе 2 главы 2** рассматривается вопрос о сходимости спектральных разложений по всей системе собственных функций.

**Теорема 4.** *Пусть $f(x)$ – функция из класса Гельдера $C^{\alpha}[0,1], \alpha > 0$. Тогда она представима в виде равномерно сходящегося на отрезке $[0,1]$ ряда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{df(1)X_n(1)+\int_0^1 f(t)X_n(t)dt}{dX_n^2(1)+\int_0^1 X_n^2(t)dt}X_n(x).$$

*по системе собственных функций задачи (1) – (2).*

**В параграфе 3 главы 2** рассматривается смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$U_t(x,t)=a^2U_{xx}(x,t) \tag{9}$$

в области $D=\{(x,t);\quad 0<x<1,\quad 0<t<T\}$ с граничными условиями

$$U_x'(o,t)=bU(0,t),\quad U_x'(1,t)=-dU_t'(1,t), \tag{10}$$

$$b\neq 0,\quad d>0$$

и начальным условием

$$U(x,0)=f(x). \tag{11}$$

Требуется найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ функцию $U(x,t)$ из класса $C^1(\overline{D}\cap\{t>0\})\cap C^{2,1}(D)$ для уравнения (9) с граничными условиями (10) и начальными условиями (11), $f(x)\in C[0,1]$.

**Лемма 1.** *Решение задачи (9)-(11) единственно.*

На основании результатов теоремы 4 и леммы 1, установлено следующее утверждение.

**Теорема 5.** *Пусть $f(x)$ - функция из класса Гельдера $C^\alpha[0,1], \alpha>0$. Тогда решение задачи (9)-(11) можно представить в виде билинейного ряда*

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[df(1)X_n(1)+\int_0^1 f(t)X_n(t)dt\right]\times \tag{12}$$

$$\times\left[dX_n^2(1)+\int_0^1 X_n^2(t)dt\right]^{-1}X_n(x)e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Также в этом параграфе рассмотрена краевая задача для уравнения смешанного типа. Введены обозначения:

$$D=\{(x,t):0<x<t+1,\;\; 0<t\leqslant 1/2;\;\; 0<x<2-t,\;\; 1/2<t<1\},$$

$$D_1=D\cap\{x<1\},\;\; D_2=D\cap\{x>1\}.$$

Рассматривается параболо-гиперболическое уравнение

$$U_t(x,t)=a^2U_{xx}(x,t),\;\; (x,t)\in D_1, \tag{13}$$

$$U_{tt}(x,t)=U_{xx}(x,t),\;\; (x,t)\in D_2.$$

Пусть требуется найти функцию $U(x,t)$ из класса $C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^1(\overline{D_1}\cap\{t>0\})\cap C^{2,1}(D_1)\cap C^2(D_2)$, удовлетворяющую уравнению (13) и граничным условиям

$$U_x(0,t) = bU(0,t), \;\; 0 < t < 1, \tag{14}$$

$$U(t+1,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1/2,$$

$$U(x,0) = f(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$f(x) \in C^\alpha[0,1], \;\; \alpha > 0, \;\; f(1) = 0.$$

Используя обозначение

$$f_n = \frac{\int_0^1 f(x) X_n(x) dx}{\int_0^1 X_n^2(x)dx + X_n^2(1)}, \;\; n = 0,1,2,...,$$

в котором система $\{X_n(x)\}$ - множество решений спектральной задачи (1)-(2) при $d = 1$, решение задачи (13)-(14) записывается в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X_n(x) e^{-a^2\lambda_n t}, \;\; (x,t) \in D_1, \tag{15}$$

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X_n(1) e^{-a^2\lambda_n (t+1-x)}, \;\; (x,t) \in D_2.$$

Справедлива

**Теорема 6.** *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^\alpha[0,1], \alpha > 0$, и $f(1) = 0$. Тогда решение задачи (13) - (14) существует, единственно и представимо в виде рядов (15).*

В заключении выражаю искреннюю признательность своему научному руководителю, академику РАН Моисееву Е.И. за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку. Хочу поблагодарить доктора физико-математических наук Капустина Н.Ю. за интерес к работе, консультации и ценные замечания.

## Публикации

**1**. Гуляев Д.А. О равномерной сходимости спектральных разложений для спектральной задачи с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр. //Дифференц. уравнения, 2011, Т.47, №10, С. 1503-1507

**2**. Гуляев Д.А. О сходимости в классе $W_2^m$ спектральных разложений для спектральной задачи с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр. //Дифференц. уравнения, 2012, Т.48, №10, С. 1450-1454

**3**. Гуляев Д.А. Об одной смешанной задаче для уравнения теплопроводности, приводящей к спектральной задаче с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр //Сборник молодых ученых факультета ВМК МГУ, №9, 2012